Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 16 febbraio 2024

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è due ore.

Esercizio 1 Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + |y|^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Dato un vettore $\vec{v} = v_1\vec{\mathbf{i}} + v_2\vec{\mathbf{j}}$ si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione $\vec{v}$. (2 pt.)

$f'(0,0)(\vec{v}) =$ $\boxed{0}$ / non esiste per tutti i $\vec{v}$

(b) Si dica se f è continua in $(0,0)$: ~~SI~~ NO (1 pt.)

(c) Si dica, motivando brevemente la risposta, se f è differenziabile in $(0,0)$: ~~SI~~ NO perché: (3 pt.)

$$\left| \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} \right| = \frac{|x^3 y|}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+|y|^3)} = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \frac{x^2}{x^2+|y|^3} \le$$

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{2} \, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Ne segue che f è diff in $(0,0)$ e

$df(0,0)(\vec{v}) = 0 \ \forall \vec{v}$ $\quad (df(0,0) = 0)$

$$f = \frac{x^3 y}{x^2+|y|^3} \qquad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

(a) $$f'(0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(tv_1, tv_2) - f(0,0)\Big) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^3\, t v_2}{t\,(t^2 v_1^2 + |t|^3 |v_2|^3)} = \lim_{t\to 0} \frac{t\, v_1^3 v_2}{v_1^2 + |t||v_2|^3} = 0 \quad \text{se } v_1 \neq 0$$

Ma se $v_1 = 0$ viene zero perché il numeratore è zero $\forall t$.

$\Rightarrow f'(0)(\vec{v}) = 0$

(b) $$\left|\frac{x^3 y}{x^2+|y|^3}\right| = |xy| \frac{x^2}{x^2+|y|^3} \leq |xy| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

f è continua in $(0,0)$

(c) Dato che $f'(0)(\vec{v}) = 0$ il differenziale <u>SE ESISTE</u> è nullo. Dunque - usando la def. di differenziale - f è differenziabile in $(0,0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+|y|^3)} = 0$$

USANDO LA STESSA DISUGUAGLIANZA DI PRIMA:

$$\left|\frac{x^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+|y|^3)}\right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} \to 0$$

f è diff. in $(0,0)$!!

Esercizio 2 Si consideri la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$x(x+1)y'' - (4x+1)y' - 6y = 60x.$$

Diamo per buono che le soluzioni definite vicino a zero si possono esprimere come una serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(a) Si scriva una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (2 pt.)

$(\mathcal{R})$ $(n+1)\left(a_{n+1}(n-1)+a_n(n-6)\right) = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 60 & n=1 \end{cases}$

(b) Si indichi quale delle seguenti affermazioni è corretta: (1 pt.)

(b.1) Non esiste nessuna soluzione y con $y(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.2) esiste un'unica soluzione y con $y(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.3) esistono infinite soluzioni y con $y(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.4) nessuna delle precedenti.

(c) Si dica se esiste una soluzione y tale che y è un polinomio di primo grado e in caso affermativo si trovi y: (3 pt.)

$y(x) =$ $1-6x$ / non esiste

(d) Si dica se esiste una soluzione y tale che $y''(0) = 2$ in caso affermativo si trovi una tale y: (3 pt.)

$y(x) =$ $1-6x+x^2+4x^3+6x^4+4x^5+x^6$ / non esiste.

Se $y=\sum_{n\geq 0} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n\geq 0} a_n n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}(n+1)x^n$

$y'' = \sum_{n\geq 0} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1}(n+1)n\, x^n \Rightarrow$

$x(x+1)y'' - (4x+1)y' - 6y =$

$\sum_{n\geq 0}\{a_n n(n-1) + a_{n+1}(n+1)n - 4a_n n - a_{n+1}(n+1) - 6a_n\}x^n$

$=\sum_{n\geq 0}\{a_{n+1}(n+1)(n-1) + a_n(\underbrace{n^2-n-4n-6}_{(n+1)(n-6)})\}x^n =$

$=\sum_{n\geq 0}(n+1)\{a_{n+1}(n-1)+a_n(n-6)\}x^n$

DUNQUE TROVIAMO

(R) $(n+1)(a_{n+1}(n-1)+a_n(n-6)) = b_n = \begin{cases} 60 & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{se } n\neq 1\end{cases}$

Se $n=0 \Rightarrow -a_1 - 6a_0 = 0 \iff \boxed{a_1=-6a_0}$

Se $n=1 \Rightarrow -10a_1 = b_1 = 60 \iff \boxed{a_1=-6}$ $\boxed{a_0=1}$

Se $n=2 \Rightarrow 3(a_3-4a_2)=0$ $\boxed{a_3=4a_2}$

Se $n=3 \Rightarrow 4(2a_4-3a_3)=0$ $\boxed{a_4=6a_2}$

Se $n=4 \Rightarrow 5(3a_5-2a_4)=0$ $\boxed{a_5=4a_2}$

Se $n=5 \Rightarrow 6(4a_6-a_5)=0$ $\boxed{a_6=a_2}$

Se $n=6 \Rightarrow 7(5a_7)=0 \Rightarrow a_7=0 \Rightarrow a_n=0\ \forall n\geq 7$

DUNQUE $y(x) = 1-6x+a_2(x^2+4x^3+6x^4+4x^5+x^6)$.

- Si vede che $y(1)=1$ (non può essere -1)
- Se $a_2=0 \Rightarrow y(x)=1-6x$ è di grado 1
- $y''(0)=2 \iff a_2=1$

Esercizio 3 Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\right\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := (1 - x^2 - y^2)(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}) + z^2\vec{\mathbf{k}}.$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D. Consideriamo inoltre i tre insiemi:

$$S := \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq \sqrt{3}\right\},$$

$$L := \left\{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq \ z \leq \sqrt{3}\right\}, \ B := \left\{z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

(a) Si ha: $\boxed{\partial D \subset (S \cup L)}$ / $\boxed{\partial D = (S \cup L)}$ / $\boxed{\cancel{(S \cup L) \subset \partial D}}$ (1 pt.)

(b) Se $P = \left(3/4, -\sqrt{6}/4, 7/4\right)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{\frac{3}{8}}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{-\frac{\sqrt{6}}{8}}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{\frac{7}{8}}\ \vec{\mathbf{k}}$/ $\boxed{\text{non esiste}}$

(c) Se $P = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\right)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\ \vec{\mathbf{k}}$/ $\boxed{\cancel{\text{non esiste}}}$

(d) Si calcoli il rotore di $\vec{f}$: (1 pt.)

$\vec{\nabla} \otimes \vec{f}(x, y, z) = \boxed{0}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{2(y-x)}\ \vec{\mathbf{k}}$/ $\boxed{\text{non esiste}}$

(e) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso le superfici orientate $(S, \hat{\nu})$ e $(L, \hat{\nu})$: (6 pt.)

$\iint\limits_S \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{64}{5}\pi}$ $\iint\limits_L \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{0}$.

$D = \{ g_1 \le 0,\ g_2 \le 0,\ g_3 \le 0 \}$ dove $g_1 = x^2+y^2-1$

$g_2 = x^2+y^2+z^2-4$, $g_3 = -z$

Allora

$$\partial D = \{x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2 \le 1,\ z \ge 0\} \cup \{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2=1,\ z\ge 0\}$$
$$\cup \{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le 1,\ z=0\} =$$
$$\underbrace{\{x^2+y^2+z^2=4,\ z^2 \ge 3,\ z \ge 0\}}_{S} \cup \underbrace{\{x^2+y^2=1,\ z^2 \le 3,\ z\ge 0\}}_{L} \cup \underbrace{\{x^2+y^2 \le 1,\ z=0\}}_{B}$$

(a) $\Rightarrow \partial B = S \cup L \cup B \supset S \cup L$

(b) Se $P = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{7}{4}\right) \Rightarrow g_1(P) = \frac{9}{16} + \frac{6}{16} + \frac{49}{16} = \frac{64}{16} = 4$

$g_2(P) = \frac{9}{16} + \frac{6}{16} - 1 = \frac{15}{16} - 1 < 0 \qquad g_3(P) = -\frac{7}{4} < 0$

DUNQUE $\hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla g_1(P)}{\|\nabla g_1(P)\|} = \dfrac{P}{\|P\|} = \frac{1}{2}P$ (S è la sfera di raggio 2)

(c) Se $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow g_1(P) = 1 - 4 < 0 \qquad \underbrace{g_2(P) = 0 \quad g_3(P) = 0}_{\text{NON } \exists\ \hat{\nu}(P)}$

(d)
$$\vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & 1-x^2-y^2 \\ \vec{j} & D_y & 1-x^2-y^2 \\ \vec{K} & D_z & z^2 \end{bmatrix} = (-2x+2y)\vec{K}$$

(e) Notiamo che su B $\vec{f} = (1-x^2-y^2)(\vec{i}+\vec{j})$

mentre $\hat{\nu} = -\vec{K} \Rightarrow \hat{f} \cdot \hat{\nu} = 0 \Rightarrow \int_B \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 0$

Inoltre su L $x^2+y^2=1 \Rightarrow \vec{f}(x,y,z) = z^2\vec{K}$

mentre $\hat{\nu}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \int_L \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \int_L 0\, d\sigma = 0$

Per trovare $\int_S \vec{f}\, d\sigma$ posso usare il teorema della divergenza

$$\iint_S \vec{f}\, d\sigma = \iint_{\partial D} \vec{f}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz = \iiint_D (-2x-2y+2z)\, dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} -2x-2y+2z \right) dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} \left(-2(x+y)\sqrt{4-x^2-y^2} + 4 - x^2 - y^2\right) dx\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(4 - \rho^2 - 2\rho(\cos\theta + \sin\theta)\sqrt{4-\rho^2}\right) \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$2\pi \int_0^2 (4-\rho^2)\rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho \quad - 2\int_0^2 \rho\sqrt{4-\rho^2}\, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta}_{=0}$$

$$= \pi \int_0^4 (4-s)\sqrt{4-s}\, d\sigma = \pi \int_0^4 (4-s)^{\frac{3}{2}} ds$$

$$= \left[\pi\, \frac{2}{5}(4-s)^{\frac{5}{2}}(-1)\right]_0^4 = \frac{2}{5}\pi\, 4^{\frac{5}{2}} = \frac{2\pi}{5}\, 2^5 = \frac{64}{5}\pi$$

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y) = xy + x - y$ e sia

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 2, 2y \geq 1\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su B (possono essere meno di otto): (6 pt.)

$(x, y) = (-1, 1)$	$(x, y) =$
$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$(x, y) =$	$(x, y) =$
$(x, y) =$	$(x, y) =$

(b) Si calcoli il minimo di f su B (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{(x,y)\in B} f(x, y) = -\frac{3\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{2}.$$

(c) Si trovi un punto di massimo (assoluto) per f su B (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$(x_{max}, y_{max}) = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$f = xy + x - y \qquad B = \{x^2+y^2 \leq 2,\ 2x \geq 1\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y+1 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x-1 \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$

Abbiamo due "funzioni di vincolo" $g_1(x,y) = x^2+y^2-2$, $g_2(x,y) = 1-2x$

$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

① Nessuna disuguaglianza: $\nabla f = 0$

$\begin{cases} y+1=0 \\ x-1=0 \\ x^2+y^2<2,\ 2y>1 \end{cases} \Rightarrow x=1,\ y=-1$ MA $x^2+y^2=2$ NO (per ora)

② Una disuguaglianza: $\nabla f = \lambda \nabla g_1 \ /\ \lambda \nabla g_2$

(2a) $\begin{cases} y+1 = 2\lambda x \\ x-1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 2,\ 2y>1 \end{cases} \Rightarrow \quad y = -1+2\lambda x$

$x = 1+2\lambda(-1+2\lambda x) = 1-2\lambda+4\lambda^2 x$

$\Leftrightarrow x(1-4\lambda^2) = 1-2\lambda$

$x(1-2\lambda)(1+2\lambda) = 1-2\lambda$

Se $2\lambda = 1$ trovo $0=0$. Allora $y=-1+x$ che insieme a $x^2+y^2=2$ mi dà $x^2+(-1+x)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$2x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dato che deve essere $y > \frac{1}{2}$ posso scartare il segno meno.. Vedo se

$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} > 2$ NO. Dunque NON TROVO NIENTE QUI

Se $2\lambda \neq 1$ trovo $x = \dfrac{1}{2\lambda+1} \Rightarrow y = \dfrac{2\lambda}{2\lambda+1} - 1 = -\dfrac{1}{2\lambda+1}$

Se impongo $x^2+y^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{(2\lambda+1)^2} + \dfrac{1}{(2\lambda+1)^2} = 2 \Leftrightarrow$

$(2\lambda+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2\lambda+1 = \pm 1 \Leftrightarrow 2\lambda = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

Con questi λ trovo $x = \pm 1$ e $y = \mp 1$. SOLO $y=1$ VA BENE

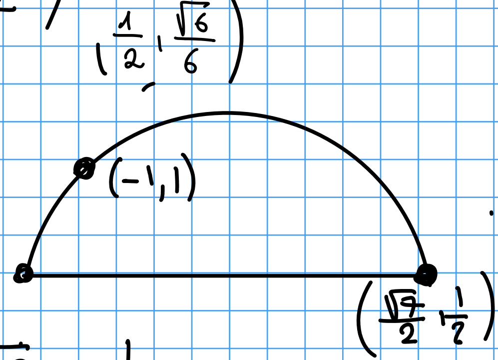
$\boxed{(-1,\ 1)}$

(2b) $\begin{cases} y+1 = 0 \\ x-1 = 2\lambda \\ x^2+y^2>2 \quad y=-1/2 \end{cases}$ IMPOSSIBILE

(3) Due eguaglianze $x^2+y^2=2 \quad y=1/2$

$\Rightarrow$ Trovo i punti $\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$



$f\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{7} - \frac{1}{2}$

$f(-1,1) = -1-1+1 = -1$

Noto che $-\frac{3\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{2} < -1 \iff 3\frac{\sqrt{7}}{4} > \frac{1}{2} \iff 3\sqrt{7} > 2$ VERO

e $-1 < \frac{3}{4}\sqrt{7} - \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < \frac{3}{4}\sqrt{7}$

$$\underbrace{f\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{= -\frac{3\sqrt{7}}{4} - \frac{1}{2} \ \text{MIN}} < \underbrace{f(-1,1)}_{=-1} < \underbrace{f\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{= \frac{3}{4}\sqrt{7} - \frac{1}{2} \ \text{MAX}}$$

Esercizio 5 Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y - 3z + 2 \\ y' = 2x - y - 2z + 1 \\ z' = 3x - 2y - 2z + 1 \end{cases} . \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad B(t) := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 2 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ −1 $\quad m_A(\lambda_2) =$ 1 $\quad m_G(\lambda_2) =$ 1 ;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $\bar{x}(t) = a$, $\bar{y}(t) = b$, $\bar{z}(t) = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) =$ -1

$\bar{y}(t) =$ -1

$\bar{z}(t) =$ 0

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali nulle:
$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (4 pt.)

$x(t) =$ $e^t(t+1) - 1$

$y(t) =$ $e^t - 1$

$z(t) =$ $t e^t$

(a) Pol. caratteristico $\det(A-\lambda I) =$

$$\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 3 & -2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(1+\lambda)(2+\lambda)+12$$

$$+12-\big((4-\lambda)4+(1+\lambda)9+(2+\lambda)4\big)$$

$$= (4-\lambda)(2+3\lambda+\lambda^2)+24-(16-4\lambda+9+9\lambda+8+4\lambda)$$

$$= 8+12\lambda+4\lambda^2-2\lambda-3\lambda^2-\lambda^3+24-33-9\lambda =$$

$-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$ ← VEDO CHE HA la radice $\lambda=1$ (e anche $\lambda=-1$)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow p(\lambda) = (\lambda-1)(-\lambda^2+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

AUTOVALORI $\lambda=1$ $m_A=2$ $\lambda=-1$ $m_A=1$

Vediamo la molt. geometrica di $\lambda=1$:

$$B_1 := A-I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$ è di rango 2 !! $\Rightarrow m_G = 1$

(b) Cerco $\overline{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \overline{Y}' = A\overline{Y}+B \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4a-2b-3c=-2 \\ 2a-b-2c=-1 \\ 3a-2b-2c=-1 \end{cases}$$ $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$

$$\begin{cases} b=a \\ 2a-3c=-2 \\ a-2c=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=a=2c-1 \\ 4c-2-3c=-2 \end{cases} \rightarrow c=0$$

$a=b=-1 \Rightarrow \overline{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) Cerco $Y(t) = \overline{Y} + Y_0(t)$. Se metto $t=0$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = Y(0) = \overline{Y} + Y_0(t) \iff \underline{\underline{Y_0(t) = -\overline{Y} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}}$$

Devo trovare una forma di Jordan per A.

- Trovo un autovettore e_1 per $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix}4 & -2 & -3\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases}5x - 2y - 3z = 0\\ 2x - 2z = 0\\ 3x - 2y + z = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}z = x\\ 2x - 2y = 0\\ 4x - 2y = 0\end{cases} \qquad x = y = z \qquad \text{posso prendere } e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

- Prendo $B_1 = A - I$ (guardo $\lambda = 1$), cioè

$$B_1 = \begin{bmatrix}3 & -2 & -3\\ 2 & -2 & -2\\ 3 & -2 & -3\end{bmatrix}$$ (che ha rango 2, come già visto)

$$B_1^2 = \begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\ -4 & 4 & 4\\ -4 & 4 & 4\end{bmatrix}$$ Mi serve $e_3 \in \operatorname{Ker} B_1^2$ ma $B_1 e_3 \neq 0$

Dalla forma di B_1^2 ho che $\operatorname{Ker} B_1^2 = \{x = y + z\}$

dunque $e_3 = \begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Guardando il vettore $Y_0(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vedo che è di questo tipo e

che $B_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Allora pongo

$$e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = Be_3 \quad (e_2 \text{ è autovettore per } \lambda = 1)$$

Pongo $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Per la teoria $A = MJM^{-1}$ $e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1}$

Allora $Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) =$

$M e^{tJ} M^{-1} e_3 = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$ (perché $M\hat{e}_3 = e_3$)

$$M \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t M \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$