Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 31 gennaio 2024

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è due ore.

Esercizio 1 Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + |y|^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Dato un vettore $\vec{v} = v_1 \vec{\mathbf{i}} + v_2 \vec{\mathbf{j}}$ si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione $\vec{v}$. (2 pt.)

$f'(0,0)(\vec{v}) =$ v_2 se $v_1 \neq 0$, 0 se $v_1 = 0$ / non esiste per tutti i $\vec{v}$

(b) Si dica se f è continua in $(0,0)$: ~~SI~~ NO (1 pt.)

(c) Si dica, motivando brevemente la risposta, se f è differenziabile in $(0,0)$: SI ~~NO~~ perché: (3 pt.)

$f'(0,0)\vec{v}$ non è lineare in $\vec{v}$

Infatti dal punto (a) segue

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f'(0)(\hat{e}_1) = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f'(0)(\hat{e}_2) = 0$

da cui, se fosse lineare, $f'(0)(v_1 v_2) = 0$

(mentre $f'(0)(1,1) = 1$)

Dunque f non è differenziabile in $(0,0)$

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+|y|^3}$ Dato $\vec{v} = (v_1, v_2)$ si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0}+t\vec{v}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(tv_1)^2(tv_2)}{t\,(tv_1)^2+|tv_2|^3} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^3(v_1^2+|t||v_2|^3)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2} = v_2 \quad \boxed{\text{se } v_1 \neq 0}$$

Però se $v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$ il numeratore è zero per ogni t per cui ho che il limite fa zero. Dunque

$$f'(0,0)(0,v_2) = 0$$

(b) si ha (per $(x,y) \neq (0,0)$)

$$|f(x,y)| = \frac{x^2|y|}{x^2+|y|^3} \leq \frac{(x^2+|y|^3)|y|}{x^2+|y|^3} = |y|$$

Dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$

da cui $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ per $(x,y) \to (0,0)$

(c) vedi sopra

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := x^3 - 2\pi x^2 + \pi^2 x.$$

(a) Si trovino i coefficienti dello sviluppo di Fourier in soli seni di f (cioè i coefficienti u_n tali che si abbia - nel senso visto a lezione - $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$, per $0 \le x \le \pi$). (4 pt.)

$$u_n = \boxed{\frac{4}{n^3}\left((-1)^n + 2\right)}$$

(b) Si dica - fornendo una breve motivazione - fino a che ordine k si può sicuramente scambiare la derivata k-esima e la serie, cioè fino a quale k possiamo dire che: $\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sin(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{d^k}{dx^k} \sin(nx)$.

per nessun k, ~~fino a $k = 1$~~, fino a $k = 2$, fino a $k = 3$, nessuna delle precedenti. (3 pt.)

Si ha $\frac{4}{n^3} \le u_n \le \frac{12}{n^3}$ per cui

$\sum_{n=1}^{\infty} n|u_n| < +\infty$ mentre $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|u_n| = +\infty$

Ne segue che possiamo prendere $k=1$

Il criterio è: " se $\sum n^k |u_n| < +\infty \Rightarrow$ si possono scambiare derivata k-esima e serie"

(d) Usando quanto trovato sopra si determini la somma della serie: (2 pt.)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \boxed{\frac{\pi^3}{32}}.$$

$f(x) = x^3 - 2\pi x^2 + \pi^2 x$. Allora

$f'(x) = 3x^2 - 4\pi x + \pi^2$, $f''(x) = 6x - 4\pi$, $f'''(x) = 6$

(a) Per la teoria si ha

$$u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi}\underbrace{\left[f(x)\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ perché } f(0)=f(\pi)=0} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi n}\Big[\underbrace{f'(x)\sin(nx)}_{=0}\frac{1}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int f''(x)\sin(nx)\,dx =$$

se $x=0$ / $x=\pi$

$$-\frac{2}{\pi n^2}\left[f''(x)\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^3}\int_0^{\pi} f'''(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi n^3}\left(f''(\pi)\cos(n\pi) - f''(0)\right) - \frac{12}{\pi n^3}\Big[\underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}}_{=0}\Big]_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{\pi n^3}\left(2\pi(-1)^n + 4\pi\right) = \frac{4}{n^3}\left((-1)^n + 2\right)$$

(b) Vedi sopra

(c) Dal punto a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3}\left((-1)^n+2\right)\sin(nx)$

(con convergenza unif. a causa del punto (b)).

Se metto $x = \frac{\pi}{2}$ ho

$$f(\pi/2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 2\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\pi^2 = \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{2} + \frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi^3}{8}$$

A causa dello sviluppo:

$$\frac{\pi^3}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{n^3}\left((-1)^n+2\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3}\left((-1)^{2k+1}+2\right)(-1)^k$$

perché $\sin\left(2k\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

$$= 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \iff \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Esercizio 3 Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \left\{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2+y^2 \geq 1, (z-2)^2 \geq x^2+y^2, 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := z^2(y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}).$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D. Consideriamo inoltre i tre insiemi:

$$C := \left\{x^2+y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\right\},$$

$$L := \left\{z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}, \ B := \left\{z = 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

1. (a) Si ha: $\boxed{\partial D \subset (C \cup L \cup B)}$ / $\boxed{\partial D = (C \cup L \cup B)}$ / $\boxed{(C \cup L \cup B) \subset \partial D}$ (1 pt.)

(b) Se $P = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1\right)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{k}}$ / $\boxed{\text{non esiste}}$

(c) Se $P = \left(1, \sqrt{5}/2, 1/2\right)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{2}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{\frac{\sqrt{16}}{6}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\vec{\mathbf{k}}$ / $\boxed{\text{non esiste}}$

(c) Si calcoli il rotore di $\vec{f}$: (1 pt.)

$\vec{\nabla} \otimes \vec{f}(x,y,z) = \boxed{xz}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{yz}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-z^2}\,\vec{\mathbf{k}}$ / $\boxed{\text{non esiste}}$

(d) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso le superfici orientate $(L, \hat{\nu})$ e $(C, \hat{\nu})$: (6 pt.)

$\iint\limits_L \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{5}{6}\pi}$ $\iint\limits_C \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{0}$.

(a) Se $D=\{x^2+y^2\ge 1,\ (z-2)^2\ge x^2+y^2,\ 0\le z\le 2\}\Rightarrow$

$$\partial D=\{x^2+y^2=1,\ (z-2)^2\ge 1,\ 0\le z\le 2\}\cup\{x^2+y^2\ge 1,\ (z-2)^2\ge x^2+y^2,\ 0\le z\le 2\}$$

$$\cup\{x^2+y^2\ge 1,\ 4\ge x^2+y^2,\ z=0\}\cup\underbrace{\{x^2+y^2\ge 1,\ 0\ge x^2+y^2,\ z=2\}}_{=\emptyset}=$$

$$\{x^2+y^2=1,\ 2-z\ge 1,\ 0\le z\le 2\}\cup\{x^2+y^2\ge 1,\ 2-z\ge\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 2\}\cup$$

$$\cup\{1\le x^2+y^2\le 4,\ z=0\}=$$

$$\underbrace{\{x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}}_{C}\cup\underbrace{\{1\le x^2+y^2\le 4,\ z=2-\sqrt{x^2+y^2}\}}_{L}\cup\underbrace{\{1\le x^2+y^2\le 4,\ z=0\}}_{B}$$

Dunque $\partial D=C\cup L\cup B$

(b) Se $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ $\quad x_0=\sqrt2/2\quad y_0=\sqrt2/2\quad z=1$ allora $P_0\in C$ perché $x_0^2+y_0^2=1$ e $0\le z_0\le 1$ ma anche $P_0\in L$ perché $1\le x_0^2+y_0^2\le 4$ e $z_0=2-\sqrt{x_0^2+y_0^2}$

$\Rightarrow$ NON ESISTE $\hat\nu(P_0)$

(c) Se $P=(1,\sqrt5/2,1/2)$, allora $x^2+y^2=1+5/4=9/4\in]1,4[$ $\Rightarrow P\notin C$, $z=1/2$ ($\Rightarrow P\notin B$) e $(z-2)^2=(-3/2)^2=9/4$ dunque $P\in L$. Dato che $L=\{Q\in D: G_L(Q)=0\}$ dove

$G_L(x,y,z)=x^2+y^2-(z-2)^2\Rightarrow$

$2\vec i+\sqrt5\vec j+3\vec k$

$\nabla G_L(x,y,z)=2x\vec i+2y\vec j+2(2-z)\Rightarrow\nabla G_L(P)=2\vec i+\sqrt5\vec j+3\vec k$

$\|\nabla G_L(P)\|=\sqrt{4+5+9}=\sqrt{18}=3\sqrt2$. Ne segue che

$$\hat\nu(P)=\frac{1}{3\sqrt2}\left(2\vec i+\sqrt5\vec j+3\vec k\right)=\frac23\sqrt2\,\vec i+\frac{\sqrt{10}}{6}\vec j+\frac{\sqrt2}{2}\vec k$$

(d)
$$\vec\nabla\otimes\vec f=\begin{vmatrix}\vec i & D_x & z^2y\\ \vec j & D_y & -z^2x\\ \vec k & D_z & z^2\end{vmatrix}=\vec i\,(2zx)-\vec j\,(-2zy)+\vec k\,(-z^2-z^2)=$$

$$2xz\,\vec i+2yz\,\vec j-2z^2\,\vec k$$

(e) · Notiamo che se $P\in B\Rightarrow\vec f(P)=0$

$$\Rightarrow\ \iint_B\vec f\cdot\hat\nu\,d\sigma=0$$

· Inoltre se $P = (x, y, z) \in C \Rightarrow$

$$\hat{\nu}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$$\vec{g}(x, y, z) \cdot \hat{\nu}(x, y, z) = \frac{z^2 x y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{z^2 x y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \iint_C \vec{g} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = 0$$

Posso allora scrivere

$$\iint_L \vec{g} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iint_{\partial D} \vec{g} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{g} \, dx\, dy\, dz =$$

$$\iiint_D 2z \, dx\, dy\, dz = \iint_{\{1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}} \left(\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2}} 2z \, dz \right) dx\, dy =$$

$$\iint_{\{1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}} \left[z^2 \right]_0^{(2-\sqrt{x^2+y^2})} dx\, dy =$$

$$\iint_{\{1 \leq x^2+y^2 \leq 4} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\, dy = \text{(coord. polari)}$$

$$2\pi \int_1^2 (2-\rho)^2 \rho \, d\rho = 2\pi \int_1^2 \left(4\rho - 4\rho^2 + \rho^3\right) d\rho =$$

$$2\pi \left[2\rho^2 - \frac{4}{3}\rho^3 + \frac{1}{4}\rho^4 \right]_1^2 = \frac{2\pi}{12} \left[24\rho^2 - 16\rho^3 + 3\rho^4 \right]_1^2 =$$

$$\frac{\pi}{6}\left(24 \cdot 4 - 16 \cdot 8 + 3 \cdot 16 - 24 + 16 - 3 \right) =$$

$$\frac{\pi}{6}\left(16 \cdot 6 - 16 \cdot 8 + 16 \cdot 3 + 16 - 24 - 3 \right) =$$

$$\frac{\pi}{6}\left(32 - 24 - 3 \right) = \frac{5}{6}\pi$$

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y) = x^3 - 6x^2 - (x+11)y^2$ e sia

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0\right\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su B (possono essere meno di otto): (6 pt.)

$(x,y) = (1, \sqrt{15})$	$(x,y) = (1, -\sqrt{15})$
$(x,y) = (0, 4)$	$(x,y) = (0, -4)$
$(x,y) = (4, 0)$	$(x,y) = (0, 0)$
$(x,y) =$	$(x,y) =$

(b) Si calcoli il minimo di f su B (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{(x,y)\in B} f(x,y) = -185.$$

(c) Si trovi un punto di massimo (assoluto) per f su B (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$(x_{max}, y_{max}) = (0, 0).$$

$$f(x,y) = x^3 - 6x^2 - (x+11)y^2$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 12x - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y(x+11)$

(a.0) Caso con zero eguaglianze

$$\begin{cases} 3x^2 - 12x - y^2 = 0 \\ -2y(x+11) = 0 \\ x^2+y^2 < 16, \ x>0 \end{cases} \Leftarrow \quad y=0 \text{ oppure } x=-11$$

NON ACCETTABILE

$$\begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ y=0 \\ 0<x<4 \end{cases} \Leftarrow \quad x=0 \quad x=4$$

NON ACCETTABILI

(a.1.1) UNA eguaglianza

$$\begin{cases} 3x^2 - 12x - y^2 = 2\lambda x \\ -2y(x+11) = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 16, \ x>0 \end{cases} \Leftarrow y=0 \text{ oppure } 2\lambda = -2(x+11)$$

Se $y=0 \implies x = \pm 4$ TROVO $\boxed{(4,0)}$

Se $2\lambda = -2(x+11)$, dalla prima riga: (e dall'ultima)

$$3x^2 - 12x + x^2 - 16 = -2(x+11)x = -2x^2 - 22x \iff$$

$$6x^2 + 10x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{6} = \frac{-5 \pm 11}{6} = \begin{cases} -\frac{16}{6} & \text{NON ACC.} \\ 1 \end{cases}$$

TROVO $\boxed{(1, \pm\sqrt{15})}$

(a.1.2) Altro caso con 1 eguaglianza

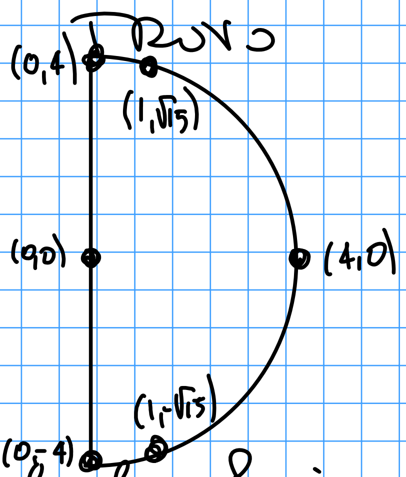
$$\begin{cases} 3x^2 - 12x - y^2 = \lambda \\ -2y(x+11) = 0 \\ x^2+y^2 < 16, \ x=0 \end{cases} \implies x=0 \quad y=0$$

TROVO $\boxed{(0,0)}$

(2.2) DUE EGUAGLIANZE

$$\boxed{(0,4) \qquad (0,-4)}$$

TROVO



Calcolo f in questi punti

$f(0,0) = 0$

$f(0,\pm 4) = -11 \cdot 16 = -176$

$f(4,0) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 - (15) \cdot 0 = (4-6) \cdot 16 = -32$

$f(1,\pm\sqrt{15}) = 1 - 6 - 12 \cdot 15 = -185$

$\Rightarrow$ MIN $= 0$ (in $(0,0)$)
MAX $= -176$ (IN $(0,\pm 4)$)

Esercizio 5 Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x - 4y + 4z + 8 \\ y' = 3y - z - 1 \\ z' = y + z + 1 \end{cases} . \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 1 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ 2 $\quad m_A(\lambda_2) =$ 2 $\quad m_G(\lambda_2) =$ 1 ;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $\bar{x}(t) = a$, $\bar{y}(t) = b$, $\bar{z}(t) = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) =$ -4

$\bar{y}(t) =$ 0

$\bar{z}(t) =$ -1

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali nulle:
$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (4 pt.)

$x(t) =$ $-4 + 4e^{2t}$

$y(t) =$ $-te^{2t}$

$z(t) =$ $-1 + (1-t)e^{2t}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)+1\right) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

AUTOVALORI $\lambda_1 = 1 \quad m_A = 1$

$\lambda_2 = 2 \quad m_A = 2$

Nel caso $\lambda_2 = 2$ considero $B = A - 2I \Rightarrow$

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \det \neq 0$$

$\Leftarrow$ vedo che ho rango 2

$\Rightarrow m_G(\lambda_2) = 1$

(b) Impongo che $\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ verifichi l'equazione:

$$0 = \bar{Y}' = A\bar{Y} + B \Leftrightarrow A\bar{Y} = -B \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 4b + 4c = -8 \\ 3b - c = 1 \\ b + c = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a - 4b + 4c = -8 \\ 3b - c = 1 \\ 4b = 0 \end{cases} \qquad b = 0 \quad c = -1$$

$$a = -8 + 4 = -4$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Cerco $Y = \bar{Y} + Y_0$ con Y_0 sol. dell'omogenea.

Si ha $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = Y(0) = \overline{Y}(0) + Y_0(0) \Leftrightarrow Y_0(0) = -\overline{Y}(0) = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$

Per trovare Y_0 mi serve la forma di Jordan di A.

Prima di tutto trovo un autovettore e_1 per $\lambda_1 = 1$

E' facile vedere che posso prendere

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Andando avanti torniamo a $B = A - \lambda_2 I = A - 2I$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} B^2 = \{ x + 4y - 4z = 0 \}$$

Cerco e_3 tale che $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2$ $e_3 \notin \operatorname{Ker} B$

Vedo che se prendo $e_3 = Y_0(0) = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$

effettivamente $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2$. Faccio

$$e_2 := B e_3 = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Allora se pongo $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

e $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ si ha $A = MJM^{-1}$

Dunque $Y_0(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0) =$

$$M e^{tJ} M^{-1} e_3 = M e^{tJ} \hat{e}_3 \quad \left(\text{perché } M\hat{e}_3 = e_3 \text{ !!}\right)$$

$$= M \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} =$$

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ -t \\ -t+1 \end{bmatrix}$$