Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 12 gennaio 2024

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è due ore.

Esercizio 1 Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+|y|^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Dato un vettore $\vec{v} = v_1\vec{\mathbf{i}} + v_2\vec{\mathbf{j}}$ si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione $\vec{v}$. (2 pt.)

$f'(0,0)(\vec{v}) =$ 0 / non esiste per tutti i $\vec{v}$

(b) Si dica se f è continua in $(0,0)$: ~~SI~~ NO. (2 pt.)

(c) Si dica, motivando brevemente la risposta, se f è differenziabile in $(0,0)$ (2 pt.)

~~è differenziabile~~ non è differenziabile perché:

Dato che $f'(0)(\hat{e}_1) = f'(0)(\hat{e}_2) = 0$, il differenziale — se esiste — è nullo. Dunque f è diff. $\Longleftrightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$. Ma si ha

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|\sqrt{|y|}\;|x|\,|y|^{3/2}}{x^2+|y|^3} \leq |x|\sqrt{|y|}\,\frac{1}{2}\frac{(x^2+|y|^3)}{x^2+|y|^3} = \frac{|x|\sqrt{|y|}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|x|}{2\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{|y|} \leq \frac{\sqrt{|y|}}{2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Ne segue che f è differenziabile (e ha differenziale nullo) in $(0,0)$

(a) $f'(0,0)(\vec{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} =$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^4 v_1^2 v_2^2}{t^2(v_1^2 + t|v_2|^3)} = \lim_{t \to 0} t^2 \frac{v_1^2 v_2^2}{v_1^2 + t|v_2|^3}$$

$= 0$ se $v_1 \neq 0$.

Se $v_1 = 0$ $(\Rightarrow v_2 \neq 0)$ però da $\frac{t^2 v_1^2 v_2^2}{v_1^2 + t|v_2|^3} = \frac{0}{\cancel{t}|v_2|^3} = 0$

dunque il limite fa zero in ogni caso

(b) Si ha $|f(x,y)| = \frac{x\sqrt{|y|}\ x|y|^{3/2}}{x^2 + |y|^3} \leq$

$$|x| \sqrt{|y|} \frac{1}{2} \frac{x^2 + |y|^3}{x^2 + |y|^3} = \frac{|x|\sqrt{|y|}}{2}$$

Dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\sqrt{|y|}}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

da cui f è continua.

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := 2x^3 - 3\pi x^2 + \pi^3.$$

(a) Si trovino i coefficienti dello sviluppo di Fourier in soli coseni di f (cioè i coefficienti v_n tali che si abbia - nel senso visto a lezione - $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(nx)$, per $0 \le x \le \pi$). (4 pt.)

$v_0 = \boxed{\frac{\pi^3}{2}}$, $\quad v_n = \boxed{\frac{24}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n^4}}$

(b) Si dica se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(nx)$ converge uniformemente, e si dia una breve motivazione della risposta:

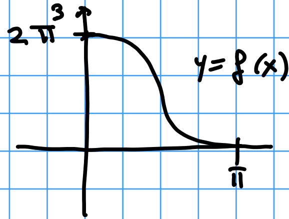
converge uniformemente / non converge uniformemente perché: (1 pt.)

(c) Si dica - usando i criteri visti a lezione - fino a che ordine k si può sicuramente scambiare la derivata k-esima e la serie, cioè fino a quale k possiamo dire che: $\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(nx) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{d^k}{dx^k} \cos(nx)$.

per nessun k, fino a $k = 1$, fino a $k = 2$, fino a $k = 3$, nessuna delle precedenti. (2 pt.)

(d) Usando quanto trovato sopra si determini la somma della serie: (2 pt.)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \boxed{\frac{\pi^4}{96}}.$$



$f(x) = 2x^3 - 3\pi x^2 + \pi^3$.

Notiamo che $\quad (f(\pi) = 0 \quad e \quad)$

$f'(x) = 6x^2 - 6\pi x \quad$ che si annulla in $x=0, x=\pi$

$f''(x) = 12x - 6\pi \qquad f'''(x) = 12$. (MI SERVONO PER INTEGRARE PER PARTI)

Usando le formule viste a lezione

$$v_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \quad \text{(per parti se } m \neq 0\text{)}$$

$$\frac{2}{\pi}\underbrace{\left[f(x)\frac{\sin(mx)}{m}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ perché } \sin(m\pi)=0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx = .$$

$$-\frac{2}{m\pi}\underbrace{\left[f'(x)\left(\frac{-\cos(mx)}{m}\right)\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ perché } f'(0)=f'(\pi)=0} - \frac{2}{m^2\pi}\int_0^{\pi} f''(x)\cos(mx)\,dx =$$

$$-\frac{2}{m^2\pi}\underbrace{\left[f''(x)\frac{\sin(mx)}{m}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ perché } \sin(m\pi)=0} + \frac{2}{m^3\pi}\int_0^{\pi} f'''(x)\sin(mx)\,dx =$$

$$\frac{24}{\pi m^3}\int_0^{\pi}\sin(mx)\,dx = \frac{24}{\pi n^3}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{-24}{\pi n^4}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{48}{\pi m^4} & \text{se } m \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$$

Se invece $m=0$ ho

$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^4 - \pi x^3 + \pi^3 x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{2}$$

DUNQUE $\quad \boxed{f(x) = \frac{\pi^3}{2} + \frac{48}{\pi}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\cos((2K+1)x)}{(2K+1)^4}}$

- L'eguaglianza sopra vale in ogni punto x e la convergenza è uniforme perché $\sum_1^{\infty}|v_n| \leq \frac{48}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m^4} < +\infty$
- Inoltre $\sum_1^{\infty} m^2|v_m| \leq \frac{48}{\pi}\sum\frac{1}{n^2} < +\infty$

  dunque si può derivare <u>due</u> volte per serie
- Se prendo $x=0$ trovo

$$\pi^3 = f(0) = \frac{\pi^3}{2} + \frac{48}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2K+1)^4} \iff \sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{(2K+1)^4} = \frac{1}{2}\frac{\pi^4}{48} = \frac{\pi^4}{96}$$

Esercizio 3 Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \, : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq \sqrt{3}x\right\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := xyz(\vec{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\vec{\mathbf{k}}).$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D.

(a) Si scriva D in forma normale rispetto all'asse y. Più precisamente si trovi un insieme D_1 in $\mathbb{R}^2$ (la "base") e due funzioni $h, k : D_1 \to \mathbb{R}$ tali che (2 pt.)

$$D = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_1, h(x, z) \leq y \leq k(x, z)\}$$

$D_1 =$ $\{(x,z) : x^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{3}x\}$

$h(x, z) =$ 0 , $k(x, z) =$ $\sqrt{4 - x^2 - z^2}$

In quanto segue consideriamo i tre insiemi:

$$S := \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 4, y \geq 0, z \geq \sqrt{3}x\right\},$$

$$L := \left\{x^2 + z^2 \leq 4, y = 0, z \geq \sqrt{3}x\right\}, \; B := \left\{4x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, z = \sqrt{3}x\right\}$$

È chiaro che S, B ed L sono superfici parametriche e che $\partial D = S \cup L \cup B$.

(b) Se $P = (0, 1, 0)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) =$ $\sqrt{3}/2$ $\vec{\mathbf{i}} +$ 0 $\vec{\mathbf{j}} +$ $-1/2$ $\vec{\mathbf{k}}$/ non esiste

(c) Si calcoli il rotore di $\vec{f}$: (1 pt.)

$\vec{\nabla} \otimes \vec{f}(x, y, z) =$ $\sqrt{3}xz$ $\vec{\mathbf{i}} +$ $y(\sqrt{3}z - x)$ $\vec{\mathbf{j}} +$ $-xz$ $\vec{\mathbf{k}}$/ non esiste

(d) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso le superfici orientate $(S, \hat{\nu})$ e $(B, \hat{\nu})$: (6 pt.)

$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma =$ $-\dfrac{64}{15}$ $\quad \iint_B \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma =$ 0.

$D = \{x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{3}x\}$ (a) Allora se $(x,y,z) \in D$ si ha $x^2+z^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ e. $z \ge \sqrt{3}x$, cioè $(x,z) \in D_1$ dove $D_1 = \{x^2+z^2 \le 4,\ z \ge \sqrt{3}x\}$. Viceversa se $(x,z) \in D_1$ e se $0 \le y \le \sqrt{4-x^2-z^2}$ è chiaro che $(x,y,z) \in D$. DUNQUE

$$D = \{(x,y,z) : (x,z) \in D_1 \quad \underbrace{0}_{h(x,z)} \le y \le \underbrace{\sqrt{4-x^2-z^2}}_{k(x,z)}$$

(b) È chiaro che $(0,1,0) \notin L \cup S$ mentre $(0,1,0) \in B$.

Su B $\hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_B(P)}{\|\nabla G_B(P)\|}$ dove $G_B(x,y,z) = \sqrt{3}x - z$

$\Rightarrow \nabla G_B = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{k}$ e $\hat{\nu}(P) = \dfrac{\sqrt{3}\vec{i} - \vec{k}}{2}$ $(\forall P \in L)$

(c) $$\vec{\nabla} \otimes \vec{f} = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & D_x & xyz \\ \vec{j} & D_y & 0 \\ \vec{k} & D_z & \sqrt{3}xyz \end{bmatrix} =$$

$$\vec{i}\ \sqrt{3}xz - \vec{j}(\sqrt{3}yz - xy) + \vec{k}(-xz) =$$

$$\sqrt{3}xz\,\vec{i} + y(\sqrt{3}z - x)\vec{j} - xz\vec{k}$$

(d) Se $P = (x,y,z) \in B$ si ha $\vec{f}(P) \cdot \hat{\nu}(P) = xyz(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{k})(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{k}) = 0$. DUNQUE $\iint_B \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 0$

Inoltre si vede che $\hat{\nu}(P) = -\vec{j}$ se $P \in L$ e

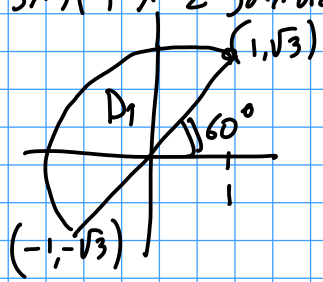
$$\vec{f}(P)\hat{\nu}(P) = xyz(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{k})(-\vec{j}) = 0 \Rightarrow \iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 0$$

Ma allora

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_D y(z + \sqrt{3}x)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D_1} (z + \sqrt{3}x)\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-z^2}} y\, dy\right) dx\,dz =$$

$$\iint_{D_1} (z + \sqrt{3}x)\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2-z^2}} dx\,dz = \frac{1}{2}\iint_{D_1} (z + \sqrt{3}x)(4 - x^2 - z^2)\,dx\,dz =$$



(coordinate polari $x = \rho\cos\theta$ $z = \rho\sin\theta$)

$$\frac{1}{2}\iint_{\{\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{4}{3}\pi,\ 0 \le \rho \le 2\}} (\rho\sin\theta + \sqrt{3}\rho\cos\theta)(4 - \rho^2)\rho\, d\theta\, d\rho =$$

$$\int_{\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\,d\theta \int_0^2 \rho^2(4 - \rho^2)\,d\rho =$$

$$\frac{1}{2}\left[-\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta\right]_{\pi/3}^{4\pi/3} \cdot \left[\frac{4}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5\right]_0^2 = \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}\right)\frac{32}{15} = -\frac{64}{15}$$

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y) = 2x^3 - 15x^2 - (x + 3)y^2$ e sia

$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \, : \, x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su B (possono essere meno di sei): (6 pt.)

$(x, y) =$ $(0, 0)$

$(x, y) =$ $(3, 0)$

$(x, y) =$ $(-3, 0)$

$(x, y) =$ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$

$(x, y) =$ $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$

$(x, y) =$

(b) Si calcoli il minimo di f su B (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{(x,y)\in B} f(x, y) = -189.$$

(c) Si trovi un punto di massimo (assoluto) per f su B (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$(x_{max}, y_{max}) = (0, 0).$$

$f(x,y) = 2x^3 - 15x^2 - (x+3)y^2$ Facciamo un po' di derivate

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 30x - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y(x+3)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 30, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(x+3)$ queste in realtà non servono

CERCO I PTI CRITICI LIBERI in $\mathring{B} = \{x^2 + y^2 < 9\}$

$$\begin{cases} y^2 = 6x^2 - 30x \\ 2y(x+3) = 0 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases} \leftarrow \text{due casi: } y=0 \text{ oppure } x=-3$$

Se $y=0$ ho $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x=0 \,/\, x=5 \Rightarrow (0,0)$ e $(5,0)$

Ma $(5,0) \notin B$ $(5^2 + 0^2 = 25 > 9)$ SOLO: $\boxed{(0,0)}$

Se $x=-3 \Rightarrow y^2 = 6 \cdot 9 + 30 \cdot 3 = 144 \Rightarrow y = \pm 12$

che mi dà $(-3, \pm 12)$. Chiaramente NON SONO IN B

Se calcolo gli Hessiani vedo che $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow$ MAX REL

$Hf(5,0) = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix} \rightarrow$ SELLA, $Hf(-3, \pm 12) = \begin{bmatrix} -66 & \pm 12 \\ \pm 12 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ sella.

TUTTO QUESTO NON È RICHIESTO

VEDIAMO I PUNTI CRITICI SU ∂B mediante i moltiplicatori

$$\begin{cases} 6x^2 - 30x - y^2 = 2\lambda x \\ -2y(x+3) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \leftarrow 2y(x+3+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = -x-3 \end{cases}$$

Se $y=0$ allora $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ (e λ si trova...)

Se $\lambda = -x-3$ dalla I e III ottengo

$$6x^2 - 30x + x^2 - 9 = -2(x+3)x \Leftrightarrow 9x^2 - 24x - 9 = 0$$

Dunque $x = \frac{12 \pm \sqrt{144+81}}{9} = \frac{12 \pm \sqrt{225}}{9} = \frac{12 \pm 15}{9} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

Se $x = 3$ deve essere $y^2 = 9 - 3^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ (GIÀ TROVATA)

Se $x = -1/3$ $y^2 = 9 - \frac{1}{9} = \frac{80}{9} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{80}}{3} = \pm\frac{4\sqrt{5}}{3}$

ALLA FINE I PUNTI SONO

$(0,0)$ $(3,0)$ $(-3,0)$, $(1/3, 4\sqrt{5}/3)$, $(1/3, -4\sqrt{5}/3)$

IN QUESTI PUNTI calcolo f

$f(0,0) = 0$ ← MAX, $f(3,0) = 54 - 135 = -81$, $f(-3,0) = -54 - 135$ -189 ← MIN

$f\left(\frac{-1}{3}, \pm\frac{4\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{27} - \frac{15}{9} - \frac{8}{3} \cdot \frac{80}{9} = \frac{-2 - 45 - 640}{27} = -\frac{687}{27} = -\frac{229}{9}$

Esercizio 5 Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 3x - y - z + 4 \\ y' = -x + 4z - 5 \\ z' = -y + 3z - 3 \end{cases} . \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B(t) := \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} .$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 2 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 3 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ $\quad m_A(\lambda_2) =$ $\quad m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $\bar{x}(t) = a$, $\bar{y}(t) = b$, $\bar{z}(t) = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) = -1$

$\bar{y}(t) = 0$

$\bar{z}(t) = 1$

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali nulle:
$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (4 pt.)

$x(t) = -1 + (4t^2 + 2t + 1)e^{2t}$

$y(t) = (2t^2 - 5t)e^{2t}$

$z(t) = 1 + (2t^2 - t - 1)e^{2t}$

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&0&4\\0&-1&3\end{bmatrix}\qquad p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-1&-1\\-1&-\lambda&4\\0&-1&3-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-1\\-1&4\end{bmatrix}+(3-\lambda)\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-1\\-1&-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$4(3-\lambda)-1\quad+(3-\lambda)\left(\lambda(\lambda-3)-1\right)=$$

$$12-4\lambda-1\quad+(3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-1)=$$

$$11-4\lambda+3\lambda^2-9\lambda-3-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda=$$

$$8-12\lambda+6\lambda^2-\lambda^3=(2-\lambda)^3$$

$\lambda=2$ UNICO AUTOV. $\quad m_A=3$

$$B:=A-2I=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&-2&4\\0&-1&1\end{bmatrix}$$. B ha rango 2 $\Rightarrow m_G=1$

(b) Cerchiamo $\bar{Y}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Rightarrow \bar{Y}'=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Allora

$$\bar{Y}'(t)-A\bar{Y}(t)=-\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&0&4\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3a+b+c\\a\quad-4c\\b-3c\end{pmatrix}$$

Se vogliamo che $\bar{Y}$ risolva l'equazione, l'ultima espressione trovata deve essere $B(t)=\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}$. Dunque

$$\begin{cases}-3a+b+c=4\\a\quad-4c=-5\\b-3c=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b+c=4\\b-3c=-3\\b-11c=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b+c=-4\\b-3c=-3\\8c=8\end{cases}$$

$c=1\quad b=0\quad a=-1$ cioè $\bar{Y}(t)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(c) CERCO $Y=\bar{Y}+Y_0$ con Y_0 sol. dell'omogenea. Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=Y(0)=\bar{Y}(0)+Y_0(0)=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+Y_0(0)\Leftrightarrow Y_0(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto che

$$B := A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Vediamo B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$. Provo con $e_3 = Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Trovo $e_1 := B^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 1+3 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $e_2 = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Allora se $M = [e_1 | e_2 | e_3]$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ abbiamo $A = MJM^{-1}$

Allora

$$Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0) = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

(perché $Y_0(0) = e_3 = M\hat{e}_3 \Rightarrow M^{-1} Y_0(0) = \hat{e}_3$)

$$M e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{2t} \begin{pmatrix} 4t^2 + 2t + 1 \\ 2t^2 - 5t \\ 2t^2 - t - 1 \end{pmatrix}$$