Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 24 novembre 2023 -A

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è un ora e trenta minuti.

Esercizio 1 Sia $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-1 \le y \le 1-x^2\}$.

Allora:

(a) Il punto $(0,0)$ è ~~interno ad A~~ / esterno ad A / di frontiera per A. (1 pt.)

(b) Il punto $(1,1)$ è interno ad A / ~~esterno ad A~~ / di frontiera per A. (1 pt.)

(c) A è aperto / ~~chiuso~~ / né aperto né chiuso. (1 pt.)

(d) La frontiera di A è: (2 pt.)

- [ ] $\{(x,y) : -1 \le x \le 2, y = x-1\} \cup \{(x,y) : -1 \le x \le 2, y = 1-x^2\}$;
- [ ] $\{(x,y) : -2 \le x \le 1, y = x-1\} \cup \{(x,y) : -1 \le x \le 2, y = 1-x^2\}$;
- [x] $\{(x,y) : -2 \le x \le 1, y = x-1\} \cup \{(x,y) : -2 \le x \le 1, y = 1-x^2\}$;
- [ ] $\{(x,y) : -1 \le x \le 2, y = x-1\} \cup \{(x,y) : -2 \le x \le 1, y = 1-x^2\}$;

nessuna delle precedenti

Esercizio 2 Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite da:

$$f(x,y) := 2x - 3y + xy, \qquad \phi(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

e sia $h := f \circ \phi$ (cioè $h(x,y) = f(\phi(x,y))$).

(a) Si trovino:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,-1) = \boxed{6}$$

(1 pt.)

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,-1) = \boxed{-6}$$

(1 pt.)

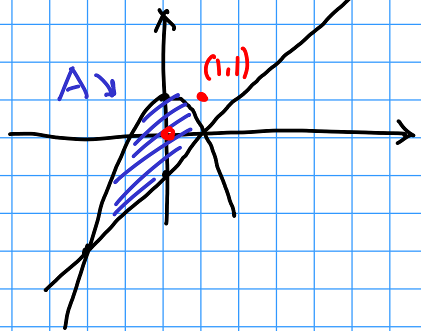
$\boxed{1}$ $(x,y) \in A \iff x-1 \leq y \leq 1-x^2 \implies$
$x-1 \leq 1-x^2 \iff x^2+x-2 \geq 0 \iff$
$x_1 \leq x \leq x_2$ dove $x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

Dunque se $(x,y) \in A \implies -2 \leq x \leq 1$; viceversa se $x \in [-2,1]$ allora ci sono delle y comprese tra $x-1$ e $1-x^2$. Dunque

$$A = \{ (x,y) : -2 \leq x \leq 1, \ x-1 \leq y \leq 1-x^2 \}$$

(A è normale rispetto all'asse x). Come visto a lezione

$$\partial A = \{ -2 \leq x \leq 1, \ x-1 = y \} \cup \{ -2 \leq x \leq 1, \ y = 1-x^2 \}$$



Si vede facilmente che

- $(0,0) \in \mathring{A}$
- $(1,1) \notin \overline{A} \quad (=A)$
- A è chiuso perché le disuguaglianze sono deboli e $x-1$, $1-x^2$ sono continue (oppure perché si vede che $\partial A \subset A$)

$\boxed{2}$ Partiamo dalla seconda domanda. Il teorema sulla derivata della composizione dice che, se $h = f \circ \phi$

$$J_h(x) = J_f(\phi(x)) \cdot J_\phi(x)$$

Dato che $\nabla h(x) = J_h(x)^T$ si ricava

$$\nabla h(x) = (J_f(\phi(x)) J_\phi(x))^T = J_\phi(x)^T J_f(\phi(x))^T = J_\phi(x)^T \nabla f(\phi(x))$$

Veniamo al caso concreto: $f(x,y) = 2x - 3y + xy$
$\phi(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$. Allora

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2+y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3+x \implies \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+y \\ -3+x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 2x$$

$$\implies J_\phi(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

. DUNQUE

$\phi(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad J_\phi(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \nabla f(0,-2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

A questo punto posso scrivere indifferentemente

$$J_h(1,-1) = J_f(0,-2)\, J_\phi(1,-1) = [0,-3] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = [6,-6]$$

oppure $\nabla h(1,-1) = J_\phi(1,-1)^T \nabla f(0,-2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

IN OGNI CASO

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,-1) = 6 \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(1,-1) = -6$$

Si può anche fare direttamente:

$$h(x,y) = 2(x^2-y^2) - 3(2xy) + (x^2-y^2)(2xy) =$$
$$2x^2 - 2y^2 - 6xy + 2x^3y - 2xy^3 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x - 6y + 6x^2y - 2y^3 \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(1,-1) = 4+6-6+2 = 6$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -4y - 6x + 2x^3 - 6xy^2 \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(1,-1) = 4-6+2-6 = -6$$

#

$\boxed{3}$ Si vede subito che

$$\|e_1\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \qquad \|e_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$e_1 \cdot e_2 = 0.$$

Dunque $\|\hat{\gamma}(t)\|^2 = \cos^2(t)\|e_1\|^2 + \sin^2(t)\|e_2\|^2 = 1$

$$\hat{\gamma}'(t) = -\sin(t)\, e_1 + \cos(t)\, e_2$$

$$\|\hat{\gamma}'(t)\| = \sin^2(t)\|e_1\|^2 + \cos^2(t)\|e_2\|^2 = 1$$

$$\hat{\gamma}(t) \cdot \hat{\gamma}'(t) = \cos(t)(-\sin(t))\langle e_1 \cdot e_1 \rangle +$$
$$2\sin(t)\cos(t)\langle e_1\, e_2\rangle$$
$$\sin(t)\cos(t)\langle e_2, e_2\rangle \qquad = 0$$

calcoliamo $\gamma'(t)$: $\quad \frac{d}{dt} t^2 \hat{\gamma}(t) = 2t\hat{\gamma}(t) + t^2 \hat{\gamma}'(t)$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = 4t^2 \|\hat{\gamma}(t)\|^2 + t^4 \|\hat{\gamma}'(t)\|^2$ $\quad \left(\text{perché } \hat{\gamma} \cdot \hat{\gamma}' = 0\right)$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + t^4}$

(b) In generale se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ sono di classe $\mathcal{C}^1$, quale delle seguenti formule è corretta ? (3 pt.)

- [ ] $\nabla h(x) = J_f(\phi(x))\, J_\phi(x)$;
- [ ] $\nabla h(x) = J_\phi(x)\, \nabla f(\phi(x))$;
- [x] $\nabla h(x) = J_\phi(x)^T\, \nabla f(\phi(x))$;
- [ ] $\nabla h(x) = \nabla \phi(x) \cdot \nabla f(\phi(x))$.

Esercizio 3 Definiamo: $\mathbf{e}_1 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ed $\mathbf{e}_2 := \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Consideriamo le curve $\hat{\gamma}, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definite da:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t) &:= \cos(t)\mathbf{e}_1 + \sin(t)\mathbf{e}_2, \\ \gamma(t) &:= t^2 \hat{\gamma}(t) \end{aligned}$$

(a) Si trovino:

$\|\hat{\gamma}(t)\| = \boxed{1}$ (1 pt.)

$\|\hat{\gamma}'(t)\| = \boxed{1}$ (1 pt.)

$\hat{\gamma}(t) \cdot \hat{\gamma}'(t) = \boxed{0}$ (1 pt.)

(b) Si calcoli la lunghezza del tratto di γ tra $t = 0$ e $t = 1$:

$$\ell\left(\gamma|_{[0,1]}\right) = \boxed{\frac{5\sqrt{5} - 8}{3}}$$

(6 pt.)

(c) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x, y, z) := x^2 - y^2 + xyz$, si calcoli la derivata di f lungo la curva γ in $t = \pi$:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=\pi} = \boxed{\pi^4 \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

(2 pt.)

Calcoliamo $\ell(\gamma|_{[0,1]}) =$

$$\int_0^1 \sqrt{4t^2+t^4} = \int_0^1 t\sqrt{4+t^2} = \qquad (s=t^2,\ ds=2t\,dt)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4+s}\,ds = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}}{3}(4+s)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(5^{3/2}-4^{3/2}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)$$

Per l'ultima domanda usiamo la formula $(f\circ\gamma)' = (\nabla f\circ\gamma)\cdot\gamma'$

Abbiamo $\hat{\gamma}(\pi) = -e_1$ $\hat{\gamma}'(\pi) = -e_2 \Rightarrow \gamma(\pi) = -\pi^2 e_1$ mentre $\gamma'(\pi) = -2\pi e_1 - \pi^2 e_2$. Invece $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ xy \end{pmatrix}$ e dunque

$$\nabla f(\gamma(\pi)) = \nabla f(-\pi^2 e_1) = \begin{pmatrix} -\pi^2\sqrt{2} \\ \pi^2\sqrt{2} \\ \pi^4/2 \end{pmatrix}$$ e infine

$$(f\circ\gamma)'(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi^2\sqrt{2} \\ \pi^2\sqrt{2} \\ \pi^4/2 \end{pmatrix}\left[-2\pi\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \pi^2\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\right] =$$

ORTOGONALI

$$\pi^4\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi^4\frac{\sqrt{2}}{2} - \pi^6\frac{\sqrt{2}}{4} = \pi^4\sqrt{2} - \pi^6\frac{\sqrt{2}}{4} = \pi^4\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi^2}{4}\right)$$

(*) VEDERE SOLUZIONE ALTERNATIVA DUE PAGINE SOTTO

$\boxed{4}$ Per i pti critici vedi lo svolgimento sotto.

Per il limite all'infinito notiamo che

$\varphi(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$ è una forma quadratica

e dunque $\varphi(x,y) \leq C\,\|(x,y)\|^2$ per $C\in\mathbb{R}$

Se vogliamo posso prendere $C=3$ dato che

$$4xy \leq 4\,\frac{x^2+y^2}{2} = 2\|(x,y)\|^2$$

Dunque $f(x,y) \geq -3\|(x,y)\|^2 + e^{\|(x,y)\|^2-1} = h(\|(x,y)\|^2)$

dove $h(t) = -3t + e^{t-1}$. Dato che $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$ (l'esponenziale "vince") ho che

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} -3\|(x,y)\|^2 + e^{\|(x,y)\|^2-1} = +\infty$$ da cui

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty.$$

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := x^2 + 4xy + y^2 + e^{x^2+y^2-1}$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e si dica se sono punti di massimo o minimo locale. (6 pt.)

Svolgimento:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y + 2x e^{x^2+y^2-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y + 2y e^{x^2+y^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 2(1+2x^2) e^{x^2+y^2-1} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 2(1+2y^2) e^{x^2+y^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 + 4xy\, e^{x^2+y^2-1}.$$

PTI CRITICI:

$$\begin{cases} 2(1+e^{x^2+y^2-1})x + 4y = 0 \\ 4x + 2(1+e^{x^2+y^2-1})y = 0 \end{cases}$$

allora o $(x,y) = (0,0)$ o il determinante

$$4(1+e^{x^2+y^2-1})^2 - 16 = 0 \iff (1+e^{x^2+y^2-1}) = 2 \iff$$

$$e^{x^2+y^2-1} = 1 \iff x^2+y^2 = 1.$$ Dunque se $(x,y) \neq (0,0)$ ho

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff (x,y) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

HO TRE PUNTI CRITICI: $\boxed{(0,0)\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$. Inoltre

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2+2e^{-1} & 4 \\ 4 & 2+2e^{-1} \end{bmatrix}$$ che ha determinante $4((1+e^{-1})^2 - 4) < 0$

DUNQUE $\underline{(0,0) \text{ è pto di SELLA}}$

$$Hf\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2+2(1+1) & 4+4(-\frac{1}{2}) \\ 4+4(-\frac{1}{2}) & 2+2(1+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

che ha determinante $= 32 > 0$ e $a_{11} = 6 > 0$

DUNQUE $\underline{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ è punto di MINIMO}}$

e lo stesso accade per $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ che ha la stessa matrice hessiana.

Ma allora per Weierstrass generalizzato f ha minimo e, dati i punti stazionari trovati, il minimo viene assunto in $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ne segue

$$\min f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1$$
$$= 1 - 2 + 1 = 0$$

VICEVERSA, dato il limite all'infinito, f non è limitata superiormente $\Rightarrow$ $\sup f = +\infty$ e il massimo non esiste

DA QUANTO DETTO segue che

$$f(x,y) \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e (dato che $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono minimi stretti) gli unici punti in cui vale $=0$ sono $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

In definitiva $\{f(x,y) \leq 0\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ che è fatto di DUE PUNTI.

(*) SOL. ALTERNATIVA DI 3.C. (CALCOLO DIRETTO)

Se si fanno i calcoli

$$\hat{\gamma}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t)\right)$$

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + xyz = (x+y)(x-y) + xyz \Rightarrow$$

$$f(t^2\gamma(t)) = t^4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cancel{\sin(t)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cancel{\sin(t)}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{\cos(t)} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{\cos(t)} + \frac{1}{2}\sin(t)\right) +$$
$$t^6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) =$$
$$t^4\sqrt{2}\cos(t)\sin(t) + t^6\left(\frac{1}{2}\cos^2(t) - \frac{1}{4}\sin^2(t)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}t^4\sin(2t) + t^6\left(\frac{\cos(2t)+1}{4} - \frac{1-\cos(2t)}{8}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}t^4\sin(2t) + \frac{\sqrt{2}}{2}t^6\sin(t)\left(\frac{3}{8}\cos(2t) + \frac{1}{8}\right)$$

Derivo in t:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{4\sqrt{2}}{2} t^3 \sin(2t) + \frac{\sqrt{2}}{2} t^4\, 2\cos(2t) +$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\, 6t^5 \sin(t)\left(\frac{3}{8}\cos(2t) + \frac{1}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} t^6 \cos(t)\left(\frac{3}{8}\cos(2t) + \frac{1}{8}\right)$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} t^6 \sin(t)\left(\frac{3}{8}(-2\sin(2t))\right)$$

Metto $t = \pi$: $\quad (\sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0,\ \cos(\pi) = -1,\ \cos(2\pi) = 1)$

$$(f \circ \gamma)'(\pi) = \sqrt{2}\,\pi^4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^6(-1)\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) =$$
$$\sqrt{2}\,\pi^4 - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^6 = \sqrt{2}\,\pi^4\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

TORNA!!

(b) Si dica se il limite $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)$:

non esiste   esiste finito   esiste e fa $+\infty$ esiste e fa $-\infty$. (2 pt.)

(c) Si dica se l'insieme $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \le 0\}$:

è vuoto

contiene esatttamente un punto

contiene ~~esatttamente~~ due punti

contiene esatttamente tre punti

contiene più di tre punti (eventualmente un numero infinito) (3 pt.)

(d)

$\max_{\mathbb{R}^2} f =$ 0 / non esiste

(1 pt.)

$\min_{\mathbb{R}^2} f =$ / non esiste

(1 pt.)

Esercizio 5 Siano $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^3}$$

Si dimostri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

Svolgimento: (6 pt.)

si ha $|xy^2| = |x|\, y^{\frac{3}{2}}\, y^{1/2}$ $(y>0)$

$\leq \frac{x^2+y^3}{2}\, y^{1/2}$ (per la solita $ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$)

DUNQUE $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^3)\, y^{1/2}}{x^2+y^3} = \frac{y^{1/2}}{2}$

Dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{1/2}}{2} = 0$ si ricorre (carabinieri)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$