Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 15 settembre 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40**   Il tempo a disposizione è due ore.

Inizio Test

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Dato un vettore $\vec{v} = v_1\vec{\mathbf{i}} + v_2\vec{\mathbf{j}}$ si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione $\vec{v}$. (2 pt.)

$f'(0,0)(\vec{v}) =$ $\boxed{\dfrac{v_1^2 v_2^3}{v_1^4+v_2^4}}$ / $\boxed{\text{non esiste per tutti i } \vec{v}}$

(b) Si dica, motivando brevemente la risposta, se f è differenziabile in $(0,0)$ (2 pt.)

$\boxed{\text{è differenziabile}}$ $\boxed{\text{non è differenziabile}}$ perché:

le derivate direzionali non sono lineari (rispetto alla direzione $\vec{v}$)

(c) Si dica se f è continua in $(0,0)$: $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$. (2 pt.)

- $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^3}{x^4+y^4}$

$$f'(0,0)(v_1,v_2) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{(tv_1)^2 (tv_2)^3}{(tv_1)^4 + (tv_2)^4} = \frac{v_1^2 v_2^3}{v_1^4+v_2^4}$$

- $$|f(x,y)| = \frac{x^2 y^2}{x^4+y^4}|y| \le \frac{\frac{x^4+y^4}{2}}{x^4+y^4}|y| = \frac{1}{2}|y|$$

ne segue che $\lim_{(x,y)\to 00} f(x,y) = 0$

---

(2) $f = x(\pi - x)$. Per le formule viste a lezione

$$u_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx) = \frac{2}{\pi}\left[f(x)\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\right]_0^\pi$$

$f(0)=f(\pi)=0 \Rightarrow$ VIENE 0

$$+ \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi f'(x)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{2}{n\pi}\left[f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi f''(x)\sin(nx)\,dx =$$

$\sin(nx) = 0$ se $x=0$ / $x=\pi$

$$\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin(nx) = \frac{4}{n^3\pi}\left[-\cos(nx)\right]_0^\pi = \frac{4(1-\cos(n\pi))}{n^3\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

- Dato che $|u_n| \le \dfrac{c}{n^3} \Rightarrow \sum |u_n| < +\infty \Rightarrow$ CONV. UNIF.

- Dato che $|u_n| \le \dfrac{c}{n^3} \Rightarrow n|u_n| \le \dfrac{c}{n^2} \Rightarrow \sum n|u_n| < +\infty \Rightarrow$

posso derivare per serie

- $$\frac{\pi^2}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_n u_n \sin(nx) = \sum_{k=0}^\infty \frac{8}{\pi}\frac{\sin(2k+1)(\pi/2)}{(2k+1)^3} = \sum_{k=0}^\infty \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

2. Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := x(\pi - x).$$

(a) Si trovino i coefficienti dello sviluppo di Fourier in soli seni di f (cioè i coefficienti u_n tali che si abbia - nel senso visto a lezione - $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$, per $0 \le x \le \pi$). (4 pt.)

$u_n = \boxed{\frac{4}{\pi} \frac{(1-(-1)^n)}{n^3}}$ oppure $\begin{cases} \frac{8}{\pi n^3} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$

(b) Si dica se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$ converge uniformemente, e si dia una breve motivazione della risposta:

converge uniformemente / non converge uniformemente perché: (1 pt.)

$|u_n| \le \frac{16}{\pi} \frac{1}{n^3}$ ← SOMMABILE

(c) Si dica se si può derivare per serie: $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{d}{dx} \sin(nx)$, e si dia una breve motivazione della risposta: si può / non si può perché: (1 pt.)

$n|u_n| \le \frac{16}{\pi} \frac{1}{n^2}$ ← ancora sommabile

(d) Si usi quanto trovato sopra per calcolare la somma S della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$: (2 pt.)

$S = \boxed{\frac{\pi^3}{32}}$.

3. Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \ : (2x-3)^2 + 16y^2 + 16z^2 \leq 16, 4z \geq \sqrt{3}(2x+1)\right\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := (4z - \sqrt{3}(2x+1))(-y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}).$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D.

(a) Si scriva D in forma normale rispetto all'asse z. Più precisamente si trovi un insieme B in $\mathbb{R}^2$ (la "base") e due funzioni $h, k : B \to \mathbb{R}$ tali che (3 pt.)

$$D = \{(x, y, x) : (x, y) \in B, h(x, y) \leq z \leq k(x, y)\}$$

$B = \boxed{\{ x^2 + y^2 \leq 1/4 \}}$

$h(x, y) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}(2x+1)}$, $k(x, y) = \boxed{\sqrt{1 - \frac{(2x-3)^2}{16} - y^2}}$

In quanto segue consideriamo i due insiemi:

$$S^- := \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = h(x, y)\}, \qquad S^+ := \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = k(x, y)\}$$

È chiaro che S^+ e S^- sono due superfici parametriche e che $\partial D = S^- \cup S^+$.

(b) Se $P = (-1/2, 0, 0)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{k}}$ / ~~non esiste~~

(c) Si calcoli la divergenza di $\vec{f}$: (1 pt.)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(x, y, z) = \boxed{4z}$ / non esiste

(d) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso le superfici orientate $(S^+, \hat{\nu})$ e $(S^-, \hat{\nu})$: (6 pt.)

$\iint_{S^+} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \boxed{\frac{\pi}{16}}$ $\iint_{S^-} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \boxed{0}$.

(a) $D=\{(2x-3)^2+16y^2+16z^2 \le 16,\ 4z \geq \sqrt{3}(2x+1)\}$

È chiaro che $D=\left\{(x,y)\in B,\ \dfrac{\sqrt{3}(2x+1)}{4} \le z \le \sqrt{1-\dfrac{(2x-3)^2}{16}-y^2}\right\}$

dove $B=\left\{\dfrac{\sqrt{3}(2x+1)}{4} \le \sqrt{1-\dfrac{(2x-3)^2}{16}+y^2}\right\}$ (sottinteso che l'argomento della radice deve essere ≥ 0).

Nei punti in cui $2x+1<0$ la disequazione è vera – in questi punti però $2x-3=2x+1-4<-4 \Rightarrow (2x-3)>16$ e dunque la radice ha argomento <0). Allora non è possibile che $(2x+1)<0$ e possiamo passare al quadrato:

$$\frac{3}{16}(2x+1)^2 \le 1-\frac{(2x-3)^2}{16}+y^2 \iff$$

$$3(4x^2+\cancel{4x}+1) \le 16-(4x^2-\cancel{12x}+9)-16y^2 \iff$$

$$16x^2+16y^2 \le 4 \iff \boxed{x^2+y^2 \le 1/4}$$

(e si vede che in questi punti la radice ha argomento >0)

(b) Si vede che $P=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)\in S^+\cap S^-$, dato che

$h(P)=0=k(P)$. DUNQUE $\nexists\ \hat{\nu}(P)$

(c) $\vec{f}=\left(4z-\sqrt{3}(2x+1)\right)\left(-y\vec{j}+z\vec{k}\right)$

$\operatorname{div}\vec{f}=\nabla\left(4z-\sqrt{3}(2x+1)\right)\left(-y\vec{j}+z\vec{k}\right)+\left(4z-\sqrt{3}(2x+1)\right)\underbrace{\operatorname{div}\left(-y\vec{j}+z\vec{k}\right)}_{=0}$

$=\left(-2\sqrt{3}\,\vec{i}+4\vec{k}\right)\left(-y\vec{j}+z\vec{k}\right)=4z$

(d) Si vede subito che, se $P\in S^-$ $\vec{f}(P)=0$

(dato che $h(P)=0$ e che $\vec{f}=h(P)\left(-y\vec{j}+z\vec{k}\right)$.

Dunque $\boxed{\iint_{S^-}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma=0}$

Allora $\iint_{S^+}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma=\iint_{S^+}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma+\iint_{S^-}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma=\iint_{\partial D}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$

$=\iiint_D \operatorname{div}\vec{f}=\iiint_D 4z\,dx\,dy\,dz=$

$$\iint_B dx\,dy \int_{h(x,y)}^{k(x,y)} 4z\,dz = \iint_B \left[2z^2\right]_{h(x,y)}^{k(x,y)} dx\,dy =$$

$$2\iint_B \left(k^2(x,y) - h^2(x,y)\right) dx\,dy = 2\iint_B \left(1 - \frac{(2x-3)^2}{16} - y^2 - \frac{3}{16}(2x+1)^2\right) dx\,dy$$

$$= 2\iint_B \left(1 - \frac{4x^2 - 12x + 9}{16} - y^2 - 3\,\frac{4x^2 + 4x + 1}{16}\right) dx\,dy =$$

$$= 2\iint_B \frac{16 - 4x^2 + \cancel{12x} - 9 - 16y^2 - \cancel{12x^2} - 12x - 3}{16}\, dx\,dy =$$

$$2\iint_B \left(\frac{1}{4} - x^2 - y^2\right) dx\,dy = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - \rho^2\right) \rho\, d\rho =$$

$$4\pi \int_0^{1/4} \left(\frac{1}{4} - s\right) \frac{ds}{2} = 2\pi \left[\frac{1}{4}s - \frac{s^2}{2}\right]_0^{1/4} = 2\pi\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{32}\right) = \boxed{\frac{\pi}{16}}$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y, z) = 2x - 3y + 6z$ e sia

$$D := \left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 4z \geq x^2 + y^2 - 4\right\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di sei): (6 pt.)

$(x, y, z) =$ $\left(\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right)$

$(x, y, z) =$ $\left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{-23}{36}\right)$

$(x, y, z) =$ $\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}, 0\right)$

$(x, y, z) =$ $\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}}, 0\right)$

$(x, y, z) =$

$(x, y, z) =$

(b) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\min_{P \in D} f(P) =$ $-\frac{49}{6}$

(c) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\max_{P \in D} f(P) =$ 14

$f = 2x - 3y + 6z$

$g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 4$

$g_2 = x^2 + y^2 - 4z - 4$

$D = \{ (x,y,z) : g_1(x) \leq 0 \ , \ g_2(x) \leq 0 \}$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4 \end{pmatrix}$

<u>VARI CASI</u>

(1) $g_1 < 0 \quad g_2 < 0 \quad \underline{\nabla f = 0}$ NO SOLUZIONI

(2A) $g_1 = 0 > g_2 \quad \nabla f = \lambda \nabla g_1$

$\left\{ \begin{array}{l} 2 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ 6 = 2\lambda z \\ g_1 = 0 > g_2 \end{array} \right.$ faccio i quadrati e sommo $\quad 4 + 9 + 36 = 4\lambda^2 (x^2+y^2+z^2) = 4\lambda^2 \cdot 4$

$\iff 16\lambda^2 = 49 \iff \lambda = \pm 7/4$

$\Rightarrow$ ricavo $(x,y,z) = \pm \frac{2}{7}(2,-3,6)$. Vediamo g_2 di questi punti

NOTIAMO CHE $g_1 - g_2 = z^2 + 4z$. Dobbiamo controllare che

$g_2 < 0 \iff g_1 - g_2 > 0 \iff z^2 + 4z < 0 \iff z > 0$ oppure $z < -4$

È chiaro che nel primo punto $z = \frac{12}{7} > 0$ è OK. Nel secondo $z = -\frac{12}{7} > -4$

e non va bene. TROVO solo $\boxed{\left(\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{12}{7} \right)}$

(2B) $g_1 < 0 = g_2 \quad \nabla f = \lambda \nabla g_2$

$\left\{ \begin{array}{l} 2 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ 6 = -4\lambda \\ g_1 < 0 = g_2 \end{array} \right.$ allora $\lambda = -\frac{3}{2}$ e $x = -\frac{2}{3}$ $y = 1$. Da $g_2 = 0$

ricavo $4z = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1 - 4 = \frac{4}{9} - 3 = -\frac{23}{9}$

$z = -\frac{23}{36}$

Devo vedere se $g_1 < 0 \iff g_1 - g_2 < 0 \iff z^2 + 4z < 0 \iff$

$-4 < z < 0 \iff -4 < -\frac{23}{36} \iff 36 \cdot 4 > 23$ VERO!

TROVO $\boxed{\left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{23}{36} \right)}$

(3) $g_1 = g_2 = 0 \quad \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$.

Notiamo che $g_1 = g_2 = 0 \Rightarrow g_1 - g_2 = z^2 + 4z = 0 \iff z = 0, z = -4$

Ma $z = 4$ mi dà $0 = g_1(x,y,4) = x^2 + y^2 + 16 - 4 = x^2 + y^2 + 12 \leftarrow$ NO

Dunque se $g_1 = g_2 = 0$ ho $z = 0$ $x^2 + y^2 = 4$. Vediamo il sistema

$$\begin{cases} 2 = (2\lambda + 2\mu)x \\ -3 = (2\lambda + 2\mu)y \\ 6 = -4\mu \\ z=0,\ x^2+y^2=4 \end{cases},$$

Dalle prime due righe ottengo

$\frac{2}{x} = -\frac{3}{y} \iff y = -\frac{3}{2}x$. IMPONGO $x^2+y^2=4$

$x^2\left(1+\frac{9}{4}\right) = 4 \iff x^2 = \frac{16}{13}$ $x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow$ TROVO $\boxed{\pm\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{6}{\sqrt{13}}, 0\right)}$

Nei punti trovati abbiamo (nell'ordine)

$f \to \frac{8+18+72}{7} = 14$

$f \to -\frac{4}{3} - 3 - \frac{23}{6} = \frac{-8-18-23}{6} = -\frac{49}{6}$

$f \to \frac{8+18}{\sqrt{13}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$

$f \to \frac{-8-18}{\sqrt{13}} = -\frac{26}{\sqrt{13}} = -2\sqrt{13}$

È chiaro che il max è 14 ($> 2\sqrt{13}$) e il minimo è $-\frac{49}{6}$ $\left(< -\frac{48}{6} = -8 = -2\sqrt{16} < -2\sqrt{13}\right)$.

5. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 3x - y - z - 3e^t \\ y' = -x + 4z + 5e^t \\ z' = -y + 3z + 2e^t \end{cases} . \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} , \qquad A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} -3e^t \\ 5e^t \\ 2e^t \end{bmatrix} .$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 2 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 3 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ $\quad m_A(\lambda_2) =$ $\quad m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $\bar{x}(t) = ae^t$, $\bar{y}(t) = be^t$, $\bar{z}(t) = ce^t$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) =$ e^t

$\bar{y}(t) =$ 0

$\bar{z}(t) =$ $-e^t$

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$: (4 pt.)

$x(t) =$ $e^t - e^{2t}(7t^2 + 3t + 1)$

$y(t) =$ $\left(-\frac{7}{2}t^2 + 3t\right) e^{2t}$

$z(t) =$ $-e^t + \left(-\frac{7}{2}t^2 + 2t + 2\right) e^{2t}$

Fine Test

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&0&4\\0&-1&3\end{bmatrix} \qquad p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-1&-1\\-1&-\lambda&4\\0&-1&3-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-1\\-1&4\end{bmatrix}+(3-\lambda)\det\begin{bmatrix}3-\lambda&-1\\-1&-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$4(3-\lambda)-1+(3-\lambda)\left(\lambda(\lambda-3)-1\right)=$$

$$12-4\lambda-1+(3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-1)=$$

$$11-4\lambda+3\lambda^2-9\lambda-3-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda=$$

$$8-12\lambda+6\lambda^2-\lambda^3=(2-\lambda)^3$$

$\lambda=2$ UNICO AUTOV. $\quad m_A=3$

$$B:=A-2I=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&-2&4\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$ B ha rango 2 $\Rightarrow m_G=1$

(b) Cerchiamo $\bar{Y}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e^t \Rightarrow \bar{Y}'=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e^t$ e troviamo la condizione

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e^t=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&0&4\\0&-1&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}e^t \iff$$

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&-1&4\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\-2\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}2a-b-c=3\\-a-b+4c=-5\\-b+2c=-2\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}2a-b-c=3\\-3b+7c=-7\\-b+2c=-2\end{cases} \qquad \begin{cases}2a-b-c=3\\-3b+7c=-7\\13c=-13\end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix}a=1\\b=0\\c=-1\end{matrix}}$$

$$\bar{Y}(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^t$$

(c) CERCO $Y=\bar{Y}+Y_0$ con Y_0 sol. dell'omogenea. Allora

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=Y(0)=\bar{Y}(0)+Y_0(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+Y_0(0)\iff Y_0(0)=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Abbiamo già visto che

$$B := A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{Vediamo } B^2.$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$. Provo con $e_3 = Y_0(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Trovo $e_1 := B^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-12 \\ -1-6 \\ -1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$ e $e_2 = B \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1+8 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

Allora se $M = [e_1 | e_2 | e_3]$

$$= \begin{bmatrix} -14 & -3 & -1 \\ -7 & 9 & 0 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{abbiamo } A = M J M^{-1}$$

dove $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Applicando la formula

$$Y(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} e_3$$

$$= M e^{tJ} \hat{e}_3 = e^{2t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{2t} \begin{bmatrix} -14 & -3 & -1 \\ -7 & 9 & 0 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} -7t^2 - 3t - 1 \\ -\frac{7}{2} t^2 + 9t \\ -\frac{7}{2} t^2 + 2t + 2 \end{pmatrix}$$