Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 21 luglio 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è due ore.

Inizio Test

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } x^2+y^2>0, \\ 0 & \text{se } x^2+y^2=0. \end{cases}$$

(a) Dato un vettore $\vec{v} = v_1\vec{\mathbf{i}} + v_2\vec{\mathbf{j}}$ si calcoli la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione $\vec{v}$. (2 pt.)

$f'(0,0)\vec{v} =$ $\dfrac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$ $\left(0 \text{ se } \vec{v}=0\right)$ / non esiste per tutti i $\vec{v}$

(b) Si dica, motivando brevemente la risposta, se f è differenziabile in $(0,0)$ (2 pt.)

è differenziabile | ~~non è differenziabile~~ perché:

$f'(0,0)\vec{v}$ non è lineare in $\vec{v}$

$$f'(0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\vec{v})-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t\,(t^2v_1^2+t^2v_2^2)}$$

$$= \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2} \quad (\text{ZERO se } \vec{v}=0)$$

2. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$x(x-1)y'' + (x+4)y' - y = 6x + 15x^4.$$

Diamo per buono che le soluzioni definite vicino a zero si possono esprimere come una serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(a) Si scriva una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (2 pt.)

$(\mathcal{R})$

$(n+1)\left(a_n(n-1) - a_{n+1}(n-4)\right) = \begin{cases} 6 & n=1 \\ 15 & n=4 \\ 0 & n\neq 1, n\neq 4 \end{cases}$ OPPURE

$a_0 = 4a_1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1/2$, $a_4 = 1$, a_5 libero

$a_{m+1} = \frac{m-1}{m-4} a_m \quad \forall m \geq 5$

(b) Si indichi quale delle seguenti affermazioni è corretta: (1 pt.)

(b.1) Non esiste nessuna soluzione y con $y(0) = 1$ VERO FALSO;

(b.2) esiste un'unica soluzione y con $y(0) = 1$ VERO FALSO;

(b.3) esistono infinite soluzioni y con $y(0) = 1$ ~~VERO~~ FALSO;

(b.4) nessuna delle precedenti.

(c) Si indichi quale delle seguenti affermazioni è corretta: (1 pt.)

(c.1) Non esiste nessuna soluzione y con $y^{iv}(0) = 0$ ~~VERO~~ FALSO;

(c.2) esiste un'unica soluzione y con $y^{iv}(0) = 0$ VERO FALSO;

(c.3) esistono infinite soluzioni y con $y^{iv}(0) = 0$ VERO FALSO;

(c.4) nessuna delle precedenti.

(d) Se y risolve l'equazione e $y(0) = 0$ dica qual è il raggio di convergenza R di y: (1 pt.)

$R =$ / ~~non è lo stesso per tutte le soluzioni~~ / y non esiste

(e) Si trovi esplicitamente la soluzione con le condizioni $y'(0) = y^{v}(0) = 0$: (4 pt.)

$y(x) =$ $x^2 - \frac{x^3}{2} + x^4$

$y = \sum_n a_n x^n \quad y' = \sum_n a_n n x^{n-1} = \sum_n a_{n+1}(n+1)x^n \quad , \quad y'' = \sum_n a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_n a_{n+1}(n+1)n x^{n-1}$

$\Rightarrow$

$(x^2-x)y'' + (x+4)y' - y =$

$\sum_n \{a_n n(n-1) - a_{n+1}(n+1)n + a_n n + 4a_{n+1}(n+1) - a_n\}x^n =$

$\sum_n \{a_n(n^2-1) - a_{n+1}(n+1)(n-4)\}x^n$. $\leftarrow$ DEVE ESSERE $= 6x + 15x^4$ DUNQUE

$$(R) \quad (n+1)\big(a_n(n-1) - a_{n+1}(n-4)\big) = \begin{cases} 6 & \text{se } n=1 \\ 15 & \text{se } n=4 \\ 0 & \text{se } n \neq 1, n \neq 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$(R) \quad \big(a_n(n-1) - a_{n+1}(n-4)\big) = \begin{cases} 3 & \text{se } n=1 \\ 3 & \text{se } n=4 \\ 0 & \text{se } n \neq 1, n \neq 4 \end{cases}$$

Se metto $n=1 \Rightarrow -a_2(-3) = 3 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 1}$

se metto $n=0 \Rightarrow a_0(-1) - a_1(-4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4a_1}$ ← UNO DEI DUE È LIBERO

Se metto $n=2 \Rightarrow a_2(1) - a_3(-2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -1/2}$

Se metto $n=3 \Rightarrow a_3(2) - a_4(-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_4 = 1}$

se metto $n=4 \Rightarrow a_4(3) = 3 \Leftrightarrow \boxed{a_4 = 1}$

VANNO D'ACCORDO !!

Se $n \geq 5 \qquad a_{n+1} = \frac{n-1}{n-4} a_n \qquad$ a_5 è libero

(b) Se metto la condizione $y(0)=1$, da R ottengo

$a_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{4} \quad a_2 = 3 \quad a_3 = -\frac{1}{2} \quad a_4 = 1 \quad a_5$ libero, a_n dipendono da a_5. $\Rightarrow \forall a_5$ ho una sol. diversa

(c) Dato che $y^{(IV)}(0) = 4!\,a_4 = 24 \neq 0$ NON È POSSIBILE TROVARE una sol. con $y^{(IV)}(0) = 0$ (o $y^{(IV)}(0) \neq 24$!!)

(d) Se metto $y(0)=0$ trovo $a_0 = 0 = a_1$, $a_2 = 3$ $a_3 = -\frac{1}{2}$ $a_4 = 1$ e ho a_5 libero. Se $a_5 = 0$ il raggio è $+\infty$ ($a_n = 0 \ \forall n \geq 5$)

se $a_5 \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{n-1}{n-4} = 1$

e dunque in questo caso $R = 1$

(e) Se impongo $y(0) = y^{(V)}(0) = 0$ ottengo $a_0 = a_5 = 0$.

Dunque $a_n = 0 \ \forall n \geq 0$, mentre $a_1 = a_0 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{-1}{2}$, $a_4 = 1$

$\Rightarrow \quad y(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + x^4$

3. Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, z \geq 2 + x^2 + y^2\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := 2yz\vec{\mathbf{i}} - xz\vec{\mathbf{j}} - xy\vec{\mathbf{k}}.$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D.

(a) Si scriva D in forma normale rispetto all'asse z. Più precisamente si trovi un insieme B in $\mathbb{R}^2$ (la "base") e due funzioni $h, k : B \to \mathbb{R}$ tali che (1 pt.)

$$D = \{(x, y, x) : (x, y) \in B, h(x, y) \leq z \leq k(x, y)\}$$

$B = \boxed{\{x^2 + y^2 \leq 1\}}$

$h(x, y) = \boxed{x^2 + y^2 + 2}$, $k(x, y) = \boxed{\sqrt{10 - x^2 - y^2}}$

In quanto segue consideriamo i due insiemi:

$$S^- := \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = h(x, y)\}, \qquad S^+ := \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = k(x, y)\}$$

È chiaro che S^+ e S^- sono due superfici parametriche e che $\partial D = S^- \cup S^+$.

(b) Si trovi una curva chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ che percorra il bordo $\Sigma(S^-)$ in modo coerente con $\hat{\nu}$. (2 pt.)

$\gamma(t) = \boxed{\cos(t)}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-\sin(t)}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{3}\,\vec{\mathbf{k}}$

(c) Se $P = \left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 3\right)$ si calcoli $\hat{\nu}(P)$: (1 pt.)

$\hat{\nu}(P) = \boxed{}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{k}}$ / ~~non esiste~~

(d) Si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$: (2 pt.)

$\vec{F}(x, y, z) = \boxed{-\frac{xz^2}{2} + \frac{xy^2}{2}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-yz^2 - \frac{x^2y}{2}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}}$ / non esiste

(e) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso le superfici orientate $(S^+, \hat{\nu})$ e $(S^-, \hat{\nu})$: (5 pt.)

$\iint_{S^+} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{0}$ $\iint_{S^-} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{0}$.

(f) Si calcoli l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo γ: (2 pt.)

$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \boxed{0}$.

(a) Se $(x,y,z) \in D \iff x^2+y^2+2 \le z \le \sqrt{10-x^2-y^2} \Rightarrow$ (Chiamo $\rho^2 = x^2+y^2$)

$\rho^2+2 \le \sqrt{10-\rho^2} \iff (\rho^2+2)^2 \le 10-\rho^2 \iff \rho^4+4\rho^2+4 \le 10-\rho^2 \iff$

$\rho^4+5\rho^2-6 \le 0$. L'eq t^2+5t-6 ha radici $t_{12} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2}$

$= \dfrac{-5\pm 7}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$ DUNQUE $-3 \le \rho^2 \le 1$

$\iff \rho^2 \le 1$. VICEVERSA SE $x^2+y^2 \le 1$ allora posto

$h(x,y) = x^2+y^2+2$, $K(x) = \sqrt{10-x^2-y^2}$ si ha $h(x,y) \le K(x,y)$

e quando $h(x,y) \le z \le K(x,y) \Rightarrow (x,y,z) \in D$

(b) È chiaro che S^+ è il grafico di K e S^- è il grafico di h (su B). Se penso a S^+/S^- come grafici la normale è sempre concorde con l'asse z. DUNQUE $\hat{\nu}(P)$ è OPPOSTA alla normale a S^- che si ottiene dalla parametrizzazione $\Gamma(u,v) = (u,v,h(u,v))$ che è $\vec{N} = -\frac{\partial h}{\partial u}\vec{i} - \frac{\partial h}{\partial v}\vec{j} + \vec{K}$ $\left(\hat{\nu} = -\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right)$. Allora per trovare γ considero $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ che percorre ∂B (in $\mathbb{R}^2$) tenendo B a sinistra, trasferisco $\tilde{\gamma}$ su $\Sigma(S^-)$ prendendo $\Gamma(\tilde{\gamma}(t)) = (\cos(t), \sin(t), \underbrace{h(\cos t, \sin(t))}_{\cos^2+\sin^2+2=3})$

e INVERTENDO il verso:

$$\boxed{\gamma(t) = (\cos(t), -\sin(t), 3)}$$

(c) $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\right) \in S^+ \cap S^-$ dato che

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+9 = 10$ e

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2 = 3 = z$

DUNQUE P NON È REGOLARE SU $\partial D \Rightarrow$ NON ESISTE $\hat{\nu}(P)$

Vedo che $\operatorname{div} \vec{g} = 0$ dunque $\vec{F}$ esiste

(d) Cerco $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{K}$ CON $F_3 = 0$. DUNQUE

$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & D_x & F_1 \\ j & D_y & F_2 \\ K & D_z & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-D_zF_2) - \vec{j}(-D_zF_1) + \vec{K}(D_xF_2 - D_yF_1)$

$\Rightarrow \begin{cases} D_zF_1 = -xz \\ D_zF_2 = -2yz \\ D_xF_2 - D_yF_1 = -xy \end{cases}$

$F_1 = -\frac{xz^2}{2} + c(x,y)$ $\qquad F_2 = -yz^2 + d(x,y)$

$D_xF_2 - D_yF_1 = D_x d - D_y c = -xy$

POSSO prendere $d = -\frac{x^2 y}{2}$ $c = 0$ OPPURE $d = 0$ $c = \frac{xy^2}{2}$

O ANCHE $d = -\frac{x^2 y}{4}$ $c = \frac{xy^2}{4}$ (e altre infinite possibilità)

CON LA TERZA SCELTA: $F_1 = -\frac{xz^2}{2} + \frac{xy^2}{2}$ $F_2 = -yz^2 - \frac{x^2 y}{2}$

(e 1) NOTO CHE su S^+ (che è un pezzo di sfera)

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$$ NE SEGUE

$$\vec{f}(x,y,z)\cdot\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2yz\vec{\imath} - xz\vec{\jmath} - xy\vec{k}\right)\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2xyz - xyz - xyz\right) = 0$$

DUNQUE $$\iint_{S^+} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = 0$$

(e 2) Dato che $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ si ha

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{f}\, dx\, dy\, dz = 0 \Rightarrow$$

$$0 = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_{S^+} \underbrace{\vec{f}\cdot\hat{\nu}}_{=0}\, d\sigma + \iint_{S^-} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma \Rightarrow \iint_{S^-} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = 0$$

(f) Dato che γ descrive $\Sigma(S^-)$ $\Rightarrow$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{S^-} \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{S^-} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = 0$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y,z) = yz + \sqrt{2}x$ e sia

$$D := \left\{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 10, z \geq 2 + x^2 + y^2\right\}.$$

(lo stesso insieme dell'esercizio precedente).

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di sei): (5 pt.)

$(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, 3\right)$

$(x,y,z) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, 3\right)$

$(x,y,z) =$

$(x,y,z) =$

$(x,y,z) =$

$(x,y,z) =$

(b) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\min_{P \in D} f(P) = -\sqrt{11}$

(c) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\max_{P \in D} f(P) = \sqrt{11}$

$f = yz + \sqrt{2}\,x \qquad g_1 = x^2+y^2+z^2-10 \qquad g_2 = x^2+y^2+2-z$

$\nabla f = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ z \\ y \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}$

$D = \{ g_1 \leq 0,\ g_2 \leq 0 \}$. Cerco i pti critici di f su D.

(1) su $g_1 < 0$ $g_2 < 0$ $\Rightarrow \nabla f = 0$ IMPOSSIBILE ($\sqrt{2} \neq 0$!)

(2.A) su $g_1 = 0$ $g_2 < 0$ ho $\nabla f = \lambda \nabla g_1$ cioè

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2\lambda x \\ z = 2\lambda y \\ y = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 10 \\ z > x^2+y^2+2 \end{cases} \to \lambda \neq 0 \Rightarrow z = 2\lambda y = (2\lambda)^2 z \quad \begin{cases} z = 0 & \text{IMPOSSIBILE perché } z > x^2+y^2+2 \geq 2 \\ 2\lambda = \pm 1 & \text{IN QUESTO CASO} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} = \pm x \\ z = \pm y \\ x^2+y^2+z^2 = 10 \\ z > x^2+y^2+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm y \\ 2 + 2y^2 = 10 \\ z > 2 + y^2 + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm y \\ y = \pm 2 \\ z > 8 \end{cases}$$ IMPOSSIBILE

(2.B) su $g_1 < 0$ $g_2 = 0$ ho $\nabla f = \mu \nabla g_1$ cioè

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2\mu x \\ z = 2\mu y \\ y = -\mu \\ x^2+y^2+z^2 < 10 \\ z = x^2+y^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -y \\ \sqrt{2} = -2xy \\ z = -2y^2 \\ x^2+y^2+z^2 < 10 \\ z = x^2+y^2+2 \end{cases}$$ INCOMPATIBILI

(3) $g_1 = g_2 = 0 \Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

Se $g_1 = g_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 + z^2 = 10 \\ \rho^2 + 2 = z \end{cases} \Rightarrow z - 2 + z^2 = 10 \Leftrightarrow z^2 + z - 12 = 0$
$(\rho^2 = x^2+y^2)$

$z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

dunque $z = 3$ $x^2+y^2 = 1$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2(\lambda+\mu)x \\ z = 2(\lambda+\mu)y \\ y = 2\lambda z - \mu \\ x^2+y^2 = 1,\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = 2(\lambda+\mu)x \\ 3 = 2(\lambda+\mu)y \\ y = 6\lambda - \mu \\ x^2+y^2 = 1,\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \sqrt{2}\,y \\ 3 = 2(\lambda+\mu)y \\ y = 6\lambda - \mu \\ x^2+y^2 = 1,\ z = 3 \end{cases} \to \begin{aligned} & x^2 + \tfrac{9}{2}x^2 = 1 \\ & 11x^2 = 2 \end{aligned}$$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{11}} \quad y = \pm\frac{3}{\sqrt{11}}$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, 3\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}, 3\right)}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, 3\right) = \frac{3 \cdot 3}{\sqrt{11}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{9+2}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}}, 3\right) = \frac{-3 \cdot 3}{\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{-9-2}{\sqrt{11}} = -\sqrt{11}$$

5. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -y - z + e^t \\ y' = -x - 3y + 4z + e^t \\ z' = -y \end{cases} . \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ $\qquad m_A(\lambda_1) =$ $\qquad m_G(\lambda_1) =$;

$\lambda_2 =$ $\qquad m_A(\lambda_2) =$ $\qquad m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $\qquad m_A(\lambda_3) =$ $\qquad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $\bar{x}(t) = ae^t$, $\bar{y}(t) = be^t$, $\bar{z}(t) = ce^t$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) = e^t$

$\bar{y}(t) = 0$

$\bar{z}(t) = 0$

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (4 pt.)

$x(t) = e^t - e^{-t}(t^2 + t + 1)$

$y(t) = -e^{-t}(t^2/2 - t)$

$z(t) = -\frac{t^2}{2} e^{-t}$

Fine Test

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$-\lambda^2(3+\lambda) - 1 - (4\lambda - \lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 1 - 3\lambda = -(\lambda+1)^3$$

$\boxed{\lambda = -1}$ unico autovalore con $\boxed{m_A = 3}$.

$$B := A + I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ ← vedo che ha rango 2 $\Rightarrow \dim(\ker B) = 1$ $\Rightarrow \boxed{m_G = 1}$

(b) Se $\bar{Y} = e^t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, allora $\bar{Y}' = e^t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e

$$\bar{Y}'(t) - A\bar{Y}(t) - B(t) = e^t \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$e^t \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Se voglio che $\bar{Y}$ sia soluzione cerco di far venire 0

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + 4b - 4c = 1 \\ b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ 4b - 4c = 0 \\ c = -b \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} a = 1 \\ b = c = 0 \end{matrix}}$$

(c) Cerco Y come $Y = \bar{Y} + Y_0$ dove $Y_0' = AY_0$ (omogenea)

Dato che $Y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \bar{Y}(0) + Y_0(0) \Leftrightarrow Y_0(0) = -\bar{Y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per trovare Y_0 devo trovare la forma di Jordan per A.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ (ha rango 1)

Cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$. Posso scegliere $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

da cui $e_2 = Be_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $e_1 = Be_2 = B^2 e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se dunque $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

si ha $A = M J M^{-1}$. Dunque

$Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0)$. Ma $Y_0(0) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_3$

da cui $M^{-1} Y_0(0) = -\hat{e}_3$. Allora

$$Y_0(t) = -M e^{tJ} \hat{e}_3 = -e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$-e^{-t} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = -e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 + t + 1 \\ t^2/2 - t \\ t^2/2 \end{pmatrix}$$