Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 30 giugno 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è due ore.

Inizio Test

1. Si consideri $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) := (e^{xy} - x, y\cos(xy))$. Notiamo che $F(0, 0) := (1, 0)$.

(a) Si dica, motivando brevemente la risposta, se esiste una funzione $G : U \to \mathbb{R}^2$, con U intorno di $(1, 0)$, tale che $F(G(\xi, \eta)) = (\xi, \eta)$ per ogni $(\xi, \eta) \in U$ (stiamo indicando con (ξ, η) le variabili di G). (2 pt.)

~~SI~~ NO perché:

F è C^1 e la matrice Jacobiana

$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} ye^{xy}-1 & xe^{xy} \\ -y^2\sin(xy) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \end{bmatrix}$, se calcolata in $(0,0)$

$J_F(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, è invertibile (ha determinante diverso da 0)

Per il teorema di inversione locale esiste G come sopra.

Inoltre (serve per il punto (b)) $J_G(0,0) = J_F(0,0)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Si calcoli:

$\frac{\partial G_1}{\partial \xi}(1, 0) =$ -1 / non esiste (1 pt.)

(c) Si calcoli:

$\frac{\partial G_2}{\partial \xi}(1, 0) =$ 0 / non esiste (1 pt.)

Dato che $J_G(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(0,0) & \frac{\partial G_1}{\partial \eta}(0,0) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \xi}(0,0) & \frac{\partial G_2}{\partial \eta}(0,0) \end{bmatrix}$

si ha quanto sopra

2. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$xy'' - (x+2)y' + 5y = 5 - 2x + 3x^2.$$

Diamo per buono che le soluzioni definite vicino a zero si possono esprimere come una serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(a) Si scriva una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (2 pt.)

$(\mathcal{R})$

$$a_{n+1}(n+1)(n-2) - (n-5)a_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n=0 \\ -2 & \text{se } n=1 \\ 3 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{se } n\geq 3 \end{cases}$$

OPPURE

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, (a_3 LIBERO) $\quad a_{n+1} = \dfrac{n-5}{(n+1)(n-2)} a_n \quad \forall n \geq 3$

(b) Si indichi quale delle seguenti affermazioni è corretta: (1 pt.)

(b.1) Non esiste nessuna soluzione y con $y(0) = 1$ VERO FALSO;

(b.2) esiste un'unica soluzione y con $y(0) = 1$ VERO FALSO;

(b.3) esistono infinite soluzioni y con $y(0) = 1$ VERO FALSO;

(b.4) nessuna delle precedenti.

(c) Si dica qual è il raggio di convergenza R delle soluzioni: (1 pt.)

$R = +\infty$ / non è lo stesso per tutte le soluzioni

(d) Si dica se esiste una soluzione y tale che y è un polinomio di secondo grado e in caso affermativo si trovi y: (3 pt.)

$y(x) = 1 + x^2$ / non esiste

(e) Si dica se esiste una soluzione y tale che $y'''(0) = 120$ in caso affermativo si trovi y: (3 pt.)

$y(x) = 1 + x^2 + 20x^3 - 10x^4 + x^5$ / non esiste.

(a) Se $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n\, x^{n-1}$$

da cui

$$x y'' - x y' - 2y' + 5y = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{n+1}(n+1)n - a_n n - 2a_{n+1}(n+1) + 5a_n \right\} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{n+1}(n+1)(n-2) - (n-5)a_n \right\} x^n .$$

DUNQUE

$$(R) \quad a_{n+1}(n+1)(n-2) - (n-5)a_n = \begin{cases} 5 & \text{se } n=0 \\ -2 & \text{se } n=1 \\ 3 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{se } n\geq 3 \end{cases}$$

Vediamo cosa ci dà (R) se prendo $n=0,1,2$.

$\underline{n=2}$ $\quad 3a_2 = 3 \Leftrightarrow \boxed{a_2=1}$

$\underline{n=1}$ $\quad -2a_2 + 4a_1 = -2 \Leftrightarrow 4a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1=0}$

$\underline{n=0}$ $\quad -2a_1 + 5a_0 = 5 \Leftrightarrow \boxed{a_0=1}$

Possiamo dunque riscrivere R come

$$(R') \quad \begin{cases} a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=1 & (a_3 \text{ LIBERO}) \\ a_{n+1} = \dfrac{n-5}{(n+1)(n-2)} a_n & \forall n\geq 3 \end{cases}$$

Notiamo che da (R') si ha $a_{n+1}=0 \quad \forall n\geq 5$ $\quad (a_n=0 \quad \forall n\geq 6)$

dunque le soluzioni y sono dei polinomi di grado ≤ 5

(b) Chiedere $y(0)=1$ equivale a $a_0=1$. Questa proprietà è VERA per ogni soluzione (si vede da R'). Al variare di $a_3 \in \mathbb{R}$ ottengo infinite soluzioni con $y(0)=1$

(c) Dato che $a_n=0 \ \forall n\geq 3 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to 0 \Rightarrow R=+\infty$

(d) Se prendo $a_3=0$ ho $y(x)=1+x^2$ che è un polinomio di grado due.

(e) La condizione $y'''(0)=120$ equivale a $a_3 = \frac{120}{3!} = 20$. Usando R'

$\underline{n=3}$ $\quad a_4 = \dfrac{(3-5)}{(3+1)(3-2)} a_3 = \dfrac{-40}{4} = -10$

$\underline{n=4}$ $\quad a_5 = \dfrac{4-5}{(4+1)(4-2)} a_4 = \dfrac{-(-10)}{10} = 1$

3. Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z \leq 8, z \leq 2y\right\}$$

e i campi vettoriali $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$\vec{f}(x,y,z) := x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}, \qquad \vec{g}(x,y,z) := (x^3 + y^3)(-\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}).$$

Daremo per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indicheremo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D.

(a) Si scriva D in forma normale rispetto all'asse z. Più precisamente si trovi un insieme B in $\mathbb{R}^2$ (la "base") e due funzioni $g, h : B \to \mathbb{R}$ tali che (2 pt.)

$$D = \{(x,y,x) : (x,y) \in B, h(x,y) \leq z \leq k(x,y)\}$$

$B =$ $\{ x^2 + (y-1)^2 \leq 3 \}$

$h(x,y) =$ $x^2 + y^2 - 8$

$k(x,y) =$ $2y$

In quanto segue consideriamo i due insiemi:

$$S := \{(x,y,z) : (x,y) \in B, z = h(x,y)\}, \qquad R := \{(x,y,z) : (x,y) \in B, z = k(x,y)\}$$

È chiaro che S e R sono due superfici parametriche e che $\partial D = S \cup R$.

(b) Si trovi una curva chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ che percorra il bordo $\Sigma(S)$ in modo coerente con $\hat{\nu}$. (2 pt.)

$\gamma(t) =$ $3\cos(t)$ $\vec{\mathbf{i}} +$ $1 - 3\sin(t)$ $\vec{\mathbf{j}} +$ $2 - 6\sin(t)$ $\vec{\mathbf{k}}$

(c) Si calcoli il flusso di $\nabla \otimes \vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(R, \hat{\nu})$: (3 pt.)

$$\iint_R (\nabla \otimes \vec{f}) \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 0.$$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{g}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (4 pt.)

$$\iint_S \vec{g} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = 486\pi.$$

(a) Dalle condizioni $x^2+y^2-z\le 8$, $z\le 2y$ si ottiene $x^2+y^2-8\le 2y \iff$

$x^2+y^2-2y+1\le 9 \iff x^2+(y-1)^2\le 9$ che individua

$B=\{x^2+(y-1)^2\le 9\}=$ cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 3.

D'altra parte se $(x,y)\in B$ e $\underbrace{x^2+y^2-8}_{g(x,y)}\le z\le \underbrace{2y}_{h(x,y)}$ è chiaro che $(x,y,z)\in D$.

(b) È chiaro che la curva $\tilde\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ definita da

$\tilde\gamma(t)=(3\cos t,\ 1+3\sin t)$ descrive $\partial B=\{x^2+(y-1)^2=9\}$

in modo coerente con B. Notiamo che S è il grafico di $G(x,y)=x^2+y^2-8$

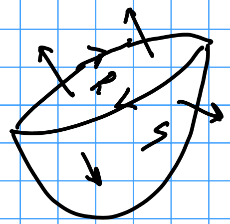
definito su B. Se considero allora

$\hat\gamma(t)=(\tilde\gamma_1(t),\ \tilde\gamma_2(t),\ G(\tilde\gamma_1(t),\tilde\gamma_2(t)))=(3\cos(t),\ 1+3\sin(t),\ 2+6\sin(t))$

(NOTA CHE se $(x,y)\in\partial B \Rightarrow G(x,y)=2y$ ... SE NO SI FA IL CONTO)

vedo che $\hat\gamma$ descrive il bordo di S, coerentemente con la normale concorde con l'asse z. Ma la $\hat\nu$ su S punta verso il basso, perché S è "la faccia inferiore di D" $\Rightarrow$ devo prendere

$\gamma(t)=(3\cos(t),\ 1-3\sin(t),\ 2-6\sin(t))$



(c) Se calcolo il rotore:

$$\vec\nabla\otimes\vec f=\det\begin{bmatrix}\vec i & D_x & x\\ \vec j & D_y & y\\ \vec k & D_z & z\end{bmatrix}=(D_y z-D_z y)\vec i-(D_x z-D_z x)\vec j+(D_x y-D_y x)\vec k=\vec 0$$

DUNQUE IL FLUSSO FA ZERO!

Se volessi usare Stokes: $\iint_R \vec\nabla\otimes\vec f\cdot\hat\nu\,d\sigma=\iint_{\partial\Sigma(R)_{\hat\nu}}\vec f\cdot d\vec s=\iint_{\hat\gamma}\vec f\cdot d\vec s=\circledast$

Infatti la curva $\hat\gamma$ scritta sopra percorre $\partial\Sigma(R)=\partial\Sigma(S)$ in modo coerente con $\hat\nu$ su R. (mentre è discorde con $\hat\nu$ su S). DUNQUE

$\circledast=\int_0^{2\pi}\vec f\,(3\cos(t),\ 1+3\sin(t),\ 2+6\cos(t))\bullet(-3\sin(t),\ 3\cos(t),\ -6\sin(t))\,dt=$

$\int_0^{2\pi}(3\cos(t),\ 1+3\sin(t),\ 2+6\cos(t))(-3\sin(t),\ 3\cos(t),\ -6\sin(t))\,dt=$

$\int_0^{2\pi}\left(-9\cancel{\sin(t)\cos(t)}+9\cancel{\sin(t)\cos(t)}+3\cos(t)-12\sin(t)-36\sin(t)\cos(t)\right)dt=$

$\int_0^{2\pi}\left(3\cos(t)-12\sin(t)-18\sin(2t)\right)dt=\boxed{0}$ (è facile da vedere)

(d) Notiamo che $\vec f(P)\cdot\hat\nu(P)=0$ se $P\in R$. Infatti R è definito da $\{z-2y=0\}\Rightarrow\hat\nu(x,y,z)=\frac{(-2\vec j+\vec k)}{\sqrt5}$ e

$(-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\cdot(-2\vec{j}+\vec{k})=0$. Dunque $\iint_R \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma=0$.

Usando il teorema della divergenza:

$$\iint_S \vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma=\iint_{\partial D}\vec{g}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}(\vec{g})\,dx\,dy\,dz=$$

$$\iiint_D (3x^2+3y^2)\,dx\,dy\,dz=3\iint_B (x^2+y^2)\int_{x^2+y^2-8}^{2y} dz=3\iint_B (x^2+y^2)(2y-x^2-y^2+8)\,dx\,dy$$

$x=\rho\cos\theta \quad y=1+\rho\sin\theta \qquad dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\theta$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^3(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta+2\rho\sin\theta+1)(2+\cancel{2\rho\sin\theta}-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta-\cancel{2\rho\sin\theta}-1+8)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^3(\rho^2+2\rho\sin\theta+1)(9-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta=$$ (il pezzo con $\sin\theta$ ho integrale nullo.)

$$3\cdot 2\pi\int_0^3(\rho^2+1)(9-\rho^2)\rho\,d\rho=3\pi\int_0^9(s+1)(9-s)\,ds \qquad (\rho^2=s)$$

$$=3\pi\int_0^9(-s^2+8s+9)\,ds=3\pi\left[-\frac{s^3}{3}+4s^2+9s\right]_0^9=\pi(-9^3+12\cdot 9^2+3\cdot 9^2)=$$

$$\pi\, 81(-9+12+3)=81\cdot 6\pi=486\pi$$

$D=\{G_1\le 0,\ G_2\le 0\}$ dove $G_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2$, $G_2(x,y,z)=x^2+y^2-z$

$f(x,y,z)=xy+z$

$$\nabla G_1=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \nabla G_2=\begin{pmatrix}2x\\2y\\-1\end{pmatrix} \qquad \nabla f=\begin{pmatrix}y\\x\\1\end{pmatrix}$$

Cerco i punti critici vincolati di f su D.

(1) Se $G_1<0$ $G_2<0$ ho la condizione $\nabla f=0 \iff \begin{pmatrix}y\\x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ← IMPOSSIBILE

(2A) Se $G_1=0$ $G_2<0$ ho la condizione $\nabla f=\lambda\nabla G_1$ cioè:

$$\begin{cases} y=2\lambda x\\ x=2\lambda y\\ 1=2\lambda z\\ x^2+y^2+z^2=2,\ x^2+y^2<z\end{cases} \Rightarrow x=2\lambda y=(2\lambda)^2x \iff x=0 \text{ oppure } (2\lambda)^2=1$$

Se $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=\sqrt{2}$; TROVO $\boxed{(0,0,\sqrt{2})}$

Se $2\lambda=-1$ avrei $z=-1$ IMPOSSIBILE

Se $2\lambda=1$ trovo $x=y$, $z=1$ ⇒ TROVO $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

PERÒ $G_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)=0$ DUNQUE NON VA BENE QUI (lo ritrovo dopo)

(2B) Se $G_1<0$ $G_2=0$ ho la condizione $\nabla f=\lambda\nabla G_2$ cioè

$$\begin{cases} y=2\lambda x\\ x=2\lambda y\\ 1=-\lambda\\ x^2+y^2+z^2<2,\ z=x^2+y^2\end{cases}$$

DUNQUE $\lambda=-1$. Ne segue

$x=-2y=4x \iff x=0 \quad (1\neq 4) \Rightarrow y=0 \quad z=0$

DUNQUE TROVO $\boxed{(0,0,0)}$

(3) $G_1 = G_2 = 0$ ho la condizione $\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2$:

$$\begin{cases} y = 2\lambda x + 2\mu x \\ x = 2\lambda x + 2\mu x \\ 1 = 2\lambda z - \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 2 \ , \quad z = x^2+y^2 \end{cases}$$

Dalle ultime condizioni ho $z^2+z-2=0$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 & \leftarrow \text{NON ACCETTABILE} \\ 1 \end{cases}$

Metto $z=1$ nel sistema

$$\begin{cases} y = 2(\lambda+\mu)x \\ x = 2(\lambda+\mu)y \quad \mu \\ 1 = 2\lambda - \mu \\ x^2+y^2 = 1 \ , \quad z=1 \end{cases}$$

Dalle prime due: $x = 2(\lambda+\mu)y = \left(2(\lambda+\mu)\right)^2 x$

da cui $x=0$ ($\Rightarrow y=0$ IMPOSSIBILE se $x^2+y^2=1$)

oppure $2(\lambda+\mu) = \pm 1$. Questo equivale a $y = \pm x$

e quindi $\boxed{x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z=1}$ (quattro soluzioni)

Se calcolo f su questi punti:

$f(0,0,0) = 0$

$f(0,0,\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

$f\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \pm \frac{1}{2} + 1 = \begin{cases} 1/2 \\ 3/2 \end{cases}$

VEDO che il max è $3/2$

e il min è 0

$\left(\sqrt{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 8 < 9\right)$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) pol. caratteristico: $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -6-\lambda, & 1, & 3 \\ -2, & -1-\lambda, & 2 \\ -9, & 2, & 4-\lambda \end{bmatrix} =$

$(-6-\lambda)(-1-\lambda)(4-\lambda) + 1 \cdot 2 \cdot (-9) + 3(-2)(2) +$
$-\{(-6-\lambda) \cdot 2 \cdot 2 + (-2)1(4-\lambda) + (-9)(-1-\lambda)3\} =$

$(\lambda+6)(\lambda+1)(4-\lambda) - 18 - 12 - \{-4(\lambda+6) + 2(\lambda-4) + 27(\lambda+1)\} =$

$(\lambda^2+7\lambda+6)(4-\lambda) - 30 - \{-4\lambda - 24 + 2\lambda - 8 + 27\lambda + 27\} =$

$4\lambda^2 + 28\lambda + 24 - \lambda^3 - 7\lambda^2 - 6\lambda - 30 + 4\lambda + 24 - 2\lambda + 8 - 27\lambda - 27 =$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$$ $\boxed{\lambda = -1}$ autovalore con $m_A = 3$

PONGO $B = A + I = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ Vedo che ha rango 2

$\Rightarrow m_G = 1$ (= dim Ker B)

(b) Cerco $\bar{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Deve essere $\bar{Y}' - A\bar{Y} = B \iff$

$$0 - \begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 6a - b + 3c = -1 \\ 2a + b - 2c = 1 \\ 9a - 2b - 4c = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b - 2c = 1 & \leftarrow II^\circ \\ -4b + 9c = -4 & \leftarrow I^\circ - 3II^\circ \\ -13b + 10c = -13 & 2III^\circ - 9II^\circ \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b - c = 1 \\ c = 0, \quad b = 1 \end{cases} \iff \left\{ a = 0 \quad b = 1, \quad c = 0 \right.$$

DUNQUE $\bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sol. dell'omogenea

(c) Cerco $Y(t) = \bar{Y} + Y_0(t)$. Se $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora

$Y_0(0) = -\bar{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque $Y_0(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per calcolare e^{tA} cerco la forma di Jordan di A.

Se $B = A + I$ allora

$$B^2 = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -9 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -9 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cerco e_3 tale che $B^2 e_3 \neq 0$. Conviene provare con $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(= \bar{Y} = -Y_0(0))$. In effetti:

$$B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =: e_1 \quad \text{e} \quad B e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

DUNQUE SE

$$M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si ha $A = M J M^{-1}$. Allora,

$$Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0) = e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1}(-e_3) =$$

$$= -e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = -e^{-t} \begin{bmatrix} t^2/2 + t \\ t^2 + 1 \\ t^2/2 + 2t \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} t^2 + 2t \\ 2t^2 + 2 \\ t^2 + 4t \end{bmatrix}$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y,z) = xy + z$ e sia

$$D := \left\{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 2,\, z \ge x^2+y^2\right\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di sei): (5 pt.)

$(x,y,z) = \boxed{(0,0,0)}$

$(x,y,z) = \boxed{(0,0,\sqrt{2})}$

$(x,y,z) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)}$

$(x,y,z) = \boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)}$

$(x,y,z) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)}$

$(x,y,z) = \boxed{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)}$

(b) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\min_{P \in D} f(P) = \boxed{0}$

(c) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\max_{P \in D} f(P) = \boxed{3/2}$

5. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -6x + y + 3z - 1 \\ y' = -2x - y + 2z + 1 \\ z' = -9x - +2y + 4z - 2 \end{cases} . \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -9 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ -1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 3 $\quad m_G(\lambda_1) =$;

$\lambda_2 =$ $\quad m_A(\lambda_2) =$ $\quad m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione **costante** $\bar{Y}$ di (Sys), oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) =$ 0

$\bar{y}(t) =$ 1

$\bar{z}(t) =$ 0

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali
$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (5 pt.)

$x(t) =$ $-e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)$

$y(t) =$ $1 - e^{-t}\left(t^2 + 1\right)$

$z(t) =$ $-e^{-t}\left(\frac{t^2}{2} + 2t\right)$

Fine Test