Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 9 giugno 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è due ore.

Inizio Test

1. Si consideri $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $G(x, y) := e^{xy+4} + 2x + y - 3$.

Indichiamo $\mathcal{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, G(x, y) = 0\}$. È chiaro che $(2, -2) \in \mathcal{M}$.

Indichiamo con $x(y)$ l'eventuale funzione trovata mediante il teorema del Dini, che sia definita vicino a $y = -2$ e tale che, vicino a $(2, -2)$, $\mathcal{M}$ coincida con il grafico di $x = x(y)$.

Analogamente indichiamo con $y(x)$ l'eventuale funzione trovata mediante il teorema del Dini, che sia definita vicino a $x = 2$ e tale che, vicino a $(2, -2)$, $\mathcal{M}$ coincida con il grafico di $y = y(x)$.

Con queste notazioni si dica quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

(a) Si ha: (2 pt.)

$x'(-2) =$ X / il Dini non garantisce l'esistenza di $x(y)$.

(b) Si ha: (2 pt.)

$y'(2) =$ 0 / il Dini non garantisce l'esistenza di $y(x)$.

$G(x,y) = e^{xy+4} + 2x + y - 3$. $G(2,-2) = e^{-4+4} + 4 - 2 - 3 = 0$

$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = y e^{xy+4} + 2 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x}(2,-2) = -2e^0 + 2 = 0$ ← NON SI PUÒ USARE DINI PER X(Y)

$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = x e^{xy+4} + 1 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(2,-2) = 2e^0 + 1 = 3 \neq 0$

$y'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} G(x, y(x))}{\frac{\partial}{\partial y} G(x, y(x))} \Rightarrow y'(2) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} G(2,-2)}{\frac{\partial}{\partial y} G(2,-2)} = 0$

2. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$x(2x+1)y'' - 2(4x+1)y' - 12y = 12 + 4x^3.$$

Diamo per buono che le soluzioni definite vicino a zero si possono esprimere come una serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(a) Si scriva una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (2 pt.)

$(\mathcal{R})$

$$(n+1)\big((n-2)a_{n+1} + 2(n-6)a_n\big) = \begin{cases} 12 & n=0 \\ 4 & n=3 \\ 0 & n\neq 0, n\neq 3 \end{cases}$$

OPPURE

$a_0 = -1$

$a_1 = a_2 = 0$, $a_4 = 6a_3 + 1$, $a_{n+1} = -\dfrac{2(n-6)a_n}{(n-2)}$, se $n \geq 4$

(b) Si indichi quale delle seguenti affermazioni è corretta: (1 pt.)

(b.1) Non esiste nessuna soluzione y con $y(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.2) esiste un'unica soluzione y con $y(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.3) esistono infinite soluzioni y con $y(0) = -1$ VERO FALSO;

(b.4) nessuna delle precedenti.

(c) Si dica qual è il raggio di convergenza R delle soluzioni: (1 pt.)

$R = +\infty$ / non è lo stesso per tutte le soluzioni

(d) Si dica se esiste una soluzione y tale che y è un polinomio di terzo grado e in caso affermativo si trovi y: (3 pt.)

$y(x) = -1 - \dfrac{x^3}{6}$ / non esiste

(e) Si dica se esiste una soluzione y tale che $y'''(0) = 0$ in caso affermativo si trovi y: (3 pt.)

$y(x) = -1 + x^4 + 2x^5 + \dfrac{4}{3}x^6$ / non esiste.

Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$

(2) $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n x^{n-1} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+1)x^n \right)$

DUNQUE

$(2x^2+x)y''(x) - (8x+2)y'(x) - 12y(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \{ 2a_n n(n-1) + a_{n+1}(n+1)n - 8a_n n - 2a_{n+1}(n+1) - 12a_n \} x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \{ a_{n+1}(n+1)(n-2) + a_n(2n^2 - 2n - 8n - 12) \} x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \{ a_{n+1}(n+1)(n-2) + 2a_n(n+1)(n-6) \} x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left((n-2)a_{n+1} + 2(n-6)a_n \right) x^n$

Se impongo l'equazione ottengo:

$$(R) \quad (n+1)\left((n-2)a_{n+1} + 2(n-6)a_n \right) = \begin{cases} 12 & \text{se } n=0 \\ 4 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{se } n\neq 0 \text{ e } n\neq 3 \end{cases}$$

(*)

Possiamo scrivere R in modo diverso (può essere utile!):

Se $n=0$ $\quad -2a_1 - 12a_0 = 12 \Rightarrow a_1 = -6(a_0+1)$

Se $n=1$ $\quad 2(-a_2 - 10a_1) = 0 \Rightarrow a_2 = -10a_1$

Se $n=2$ $\quad 3(-8a_2) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

NE SEGUE: $\boxed{a_2 = 0}$, $\boxed{a_1 = 0}$, $\boxed{a_0 = -1}$

Se $n=3$ $\quad 4(a_4 - 6a_3) = 4 \Rightarrow \boxed{a_4 = 6a_3 + 1}$

Se $n \geq 4$ posso scrivere

$$R' \qquad a_{n+1} = -\frac{2(n-6)}{(n-2)} a_n \qquad n \geq 4$$

Notiamo che per $n = 6$ abbiamo $a_7 = 0$ e allora

$a_n = 0 \quad \forall n \geq 7$ (!!)

(b) Se voglio $y(0) = -1$ ho la condizione $a_0 = 1$ che è compatibile con (R'). Dato che a_3 è libero ho infinite soluzioni con $y(0)=-1$

(c) Dato che le soluzioni sono polinomi di grado ≤ 6

$R = +\infty$

(d) Vediamo se c'è una soluzione con $a_4=0$. DA (R')

$0 = 6a_3+1 \iff a_3=-1/6$. Con questo valore di a_3

$\Rightarrow a_4=0 \Rightarrow a_n=0 \quad \forall n\geq 4$ (da R'). DUNQUE

$$y(x) = -1-\frac{1}{6}x^3$$

(e) La condizione $y'''(0)=0$ impone $a_3=0$. Da (R')

$a_4 = 1+6a_3 = \underline{\underline{1}}$ $\qquad a_5 = -\dfrac{2(4-6)}{(4-2)}\cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

$$a_6 = -\frac{2(5-6)}{(5-2)}2 = \frac{4}{3}$$

---

(3) $D = \{x^2+y^2+z \leq 8 \quad z \geq 2x\}$

(a) Se $(x,y,z)\in D$ allora

$$x^2+y^2-8 \leq -z \leq -2x$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2x \leq 8 \iff x^2+2x+1+y^2 \leq 9$$

$$\iff (x+1)^2+y^2 \leq 9$$

Se prendo $B = \{(x+1)^2+y^2 \leq 9\}$ si vede allora

che $(x,y,z)\in D \iff (x,y)\in B$ e $2x \leq z \leq 8-x^2-y^2$

(b) Per trovare la curva conviene prendere $\gamma_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

che percorre ∂B coerentemente con B. Dato che B è un cerchio

di centro -1 e raggio 3 si può prendere

$$\gamma_1(t) = (-1+3\cos(t))\vec{\imath} + 3\sin(t)\vec{\jmath}$$

A questo punto possiamo definire $\gamma(t) = \Gamma(\gamma_1(t))$ dove Γ è la parametrizzazione (cartesiana) $\Gamma(u,v) = (u,v,8-u^2-v^2)$ che mi dà:

3. Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z \leq 8, z \geq 2x\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) : (x - y + z)(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}})$$

ossiamo dare per buono che D è un dominio regolare a tratti. Indicheremo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria uscente da D.

(a) Si scriva D in forma normale rispetto all'asse z. Più precisamente si trovi un insieme B in $\mathbb{R}^2$ (la "base") e due funzioni $g, h : B \to \mathbb{R}$ tali che (2 pt.)

$$D = \{(x, y, x) : (x, y) \in B, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

$B =$ $\{(x+1)^2 + y^2 \leq 9\}$

$g(x, y) =$ $2x$

$h(x, y) =$ $8 - x^2 - y^2$

In quanto segue consideriamo i due insiemi:

$$S := \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = h(x, y)\}, \quad R := \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = g(x, y)\}$$

È chiaro che S e R sono due superfici parametriche e che $\partial D = S \cup R$.

(b) Si trovi una curva chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ che percorra il bordo $\Sigma(S)$ in modo coerente con $\hat{\nu}$. (2 pt.)

$\gamma(t) =$ $-1 + 3\cos(t)$ $\vec{\mathbf{i}} +$ $3\sin(t)$ $\vec{\mathbf{j}} +$ $-2 + 6\cos(t)$ $\vec{\mathbf{k}}$

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(R, \hat{\nu})$: (3 pt.)

$\Phi(\vec{f}, R, \hat{\nu}) =$ 0 .

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (4 pt.)

$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) =$ 81π .

$$\gamma(t) = (-1+3\cos(t))\vec{i} + 3\sin(t)\vec{j} +$$
$$\left(8 - (-1+3\cos(t))^2 - (3\sin(t))^2\right)\vec{k} =$$

$$(-1+3\cos(t))\vec{i} + 3\sin(t)\vec{j} +$$
$$\left(8 - \left(1 + 6\cos(t) + 9\cos^2(t) + 9\sin^2(t)\right)\right) =$$
$$(-1+3\cos(t))\vec{i} + 3\sin(t)\vec{j} + (-2+6\cos(t))\vec{k}$$

(c) Notiamo che essendo $R = \{\underbrace{x^2+y^2+z^2-8}_{G_1} \leq 0, \underbrace{2x-z}_{G_2} = 0\}$ si ha

$\hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_2(P)}{\|\nabla G_2(P)\|} = \dfrac{2\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{5}}$ e che, se $P = (x,y,z) \in R$

$$\Rightarrow \vec{f}(P)\cdot\hat{\nu}(P) = (x-y+z)(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\cdot(2\vec{i} - \vec{k}) = 0$$

$2+0-2=0$

DUNQUE $\displaystyle\iint_R \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = 0$

(d) Possiamo usare il teorema della divergenza:

$$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + \underbrace{\iint_R \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma}_{=0} = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{f} =$$

$$\iiint_D 2\, dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_{2x}^{8-x^2-y^2} 2\, dz\right) dx\,dy = 2\iint_B [z]_{2x}^{8-x^2-y^2} dx\,dy =$$

$$2\iint_B \left(8 - x^2 - y^2 - 2x\right) dx\,dy =$$

USIAMO COORDINATE POLARI CON ORIGINE IN $(-1,0)$

$$2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \left(8 - (-1+\rho\cos\theta)^2 - \rho^2\sin^2\theta - 2(-1+\rho\cos\theta)\right)\rho\, d\rho$$

$x = -1+\rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$
$(\Rightarrow dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta)$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \left[8 - (1 - 2\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta) - \rho^2\sin^2\theta + 2 - 2\rho\cos\theta\right] d\rho =$$

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - \rho^2)\rho\, d\rho = 4\pi\left[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^3 = 4\pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = 81\pi$$

$$\left(= \int_0^{2\pi}\int_0^9 (9-s)\, ds = 2\pi\left(81 - \frac{81}{2}\right) = 81\pi\right)$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y) = xy$ e sia

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \le 1, x \ge y\right\}.$$

(a) Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di sei): (5 pt.)

$(x, y) =$ $(0, 0)$

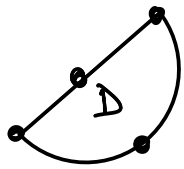
$(x, y) =$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$(x, y) =$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$(x, y) =$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$(x, y) =$

$(x, y) =$



(b) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\min_{P \in D} f(P) =$ $-1/2$

(c) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\max_{P \in D} f(P) =$ $1/2$

4

$D = \{G_1 \le 0, G_2 \le 0\}$ dove $G_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $G_2(x,y) = y - x$

$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ $\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Pti critici LIBERI: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (0,0)$ MA NON VERIFICA $x > y$ (lo ritrovo dopo)

- Punti critici su $\{G_1 = 0, G_2 < 0\}$: $\nabla f = \lambda \nabla G_1$

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1, \; y < x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 2\lambda x = 4\lambda^2 x \\ \text{da cui } x = 0 \text{ oppure} \\ 4\lambda^2 = 1 \end{array}$$

MA $x = 0 \Rightarrow y = 0$ IMPOSSIBILE DUNQUE $2\lambda = \pm 1$

OTTENGO ALLORA $x = y$ oppure $x = -y$

$\Rightarrow \quad (x,y) = \pm\left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right) \quad (x,y) = \pm\left(\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right)$ SE AGGIUNGO $x > y$

RIMANE SOLO $\boxed{\left(\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right)}$

- Punti critici su $\{G_1 < 0, G_2 = 0\}$: $\nabla f = \mu \nabla G_2$

$$\begin{cases} y = -\mu \\ x = \mu \\ x^2+y^2 < 1, \ x = y \end{cases}$$

MA I. e II $\Rightarrow y = -x$, da cui $x = -x \Rightarrow x = y = 0$

$$\boxed{(x,y) = (0,0)}$$

- Punti critici su $G_1 = G_2 = 0$: $\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2$

$$\begin{cases} y = 2\lambda x - \mu \\ x = 2\lambda y + \mu \\ x^2+y^2 = 1 \quad x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda x - \mu \\ x = 2\lambda x + \mu \\ x^2 = 1/2 \quad y = x \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt2}{2} \quad (\lambda \text{ e } \mu \text{ si trovano})$$

$$(x,y) = \boxed{\pm\left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)}$$

$$f(0,0) = 0 \quad f\left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right) = \frac{1}{2} = f\left(-\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right) \quad f\left(\frac{\sqrt2}{2}, -\frac{\sqrt2}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

MAX MIN

5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) $$P(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -4 \\ -3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} + -4\det\begin{bmatrix} -3 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((\lambda-1)(3+\lambda)\big) + 4(1-\lambda) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

DUNQUE $m_A(1) = m_G(1) = 1$. Per $\lambda = -1$ considero

$$B := A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

VEDO che ho rango 2 $\Rightarrow m_G(-1) = 1$

5. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x - 4z - 5e^{2t} \\ y' = -3x + y - 3e^{2t} \\ z' = x - 3z - 4e^{2t} \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B(t) := e^{2t} \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 1 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ −1 $\quad m_A(\lambda_2) =$ 2 $\quad m_G(\lambda_2) =$ 1 ;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

(b) Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $x(t) = ae^{2t}$, $y(t) = be^{2t}$, $z(t) = ce^{2t}$, oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) = -e^{2t}$

$\bar{y}(t) = 0$

$\bar{z}(t) = -e^{2t}$

(c) Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (5 pt.)

$x(t) = (1-2t)e^{-t} - e^{2t}$

$y(t) = -3t\, e^{-t}$

$z(t) = (1-t)e^{-t} - e^{2t}$

Fine Test

(b) cerco $\bar{Y}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ Allora

$$\bar{Y}' - A\bar{Y} = 2e^{2t}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - e^{2t}A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = e^{2t}(2I - A)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$$

$$e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} a+4c \\ 3a+b \\ -a+5c \end{bmatrix}$$

Se impongo che verifichi l'equazione

ottengo $\begin{cases} a + 4c = -5 \\ 3a + b = -3 \\ -a + 5c = -4 \end{cases} \Rightarrow (I + III^\circ) \quad 4c + 5c = -5 - 4 \Leftrightarrow \boxed{c = -1}$

da cui $\boxed{a = -1}$ e (dalla II) $\boxed{b = 0}$

DUNQUE $\bar{Y}(t) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

(c)

Cerco Y della forma $Y = \bar{Y} + Y_0$ con $Y_0' = AY_0$

Se impongo $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ottengo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{Y}(0) + Y_0(0) \Leftrightarrow Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

DUNQUE $Y_0(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mi serve la forma di Jordan per A

So che $A = MJM^{-1}$ con $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M = [e_1 | e_2 | e_3]$.

e_3 deve essere autovettore per $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = 0 \\ 3x = 0 \\ -x + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = z = 0 \quad \text{Prendo } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- e_2 lo cerco nel $\operatorname{Ker} B^2 \setminus \operatorname{Ker} B$ ($B = A + I$, calcolata sopra)

$$\text{Si ha } B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -12 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per cui $\operatorname{Ker} B^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = 3(x - z) \right\}$

Provo a prendere $y = 0 \quad x = z = 1 \Rightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

se faccio $Be_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0$

<u>TORNA</u> prendo $e_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ dunque $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

NOTO che $Y(0) = e_2$ dunque $M^{-1} Y(0) = M^{-1} e_2 = \hat{e}_2$ (perchè $M \hat{e}_2 = e_2$). ALLORA

$$Y_0(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y(0) = M e^{tJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$e^{-t} M \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-2t \\ -3t \\ 1-t \end{pmatrix}$$

IN DEFINITIVA

$$Y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1-2t \\ -3t \\ 1-t \end{pmatrix}$$