Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 1 giugno del 1 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è un ora e trenta minuti.

Inizio Test

1. Si consideri l'insieme S in $\mathbb{R}^3$ definito da: (12 pt.)

$$S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0, 2x \leq z^2, 0 \leq z \leq 3\}$$

Si dica se S è una superficie parametrica e in caso affermativo si calcoli l'area di S:

$$Area(S) = \boxed{8\sqrt{2}\pi}$$

Questo esercizio va svolto (brevemente) nello spazio bianco sottostante:

Svolgimento

Dato che $z \geq 0$ $z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2} =: g(x,y)$. Inoltre se $z \geq 0$
$z \leq 3 \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2 \leq 9$ (dunque $(x,y) \in$ CERCHIO DI RAGGIO 3 CENTRO NELL'ORIGINE), mentre
$z^2 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 \geq 1 =$
$(x-1)^2 + y^2 \geq 1$ ((x,y) fuori dal cerchio di raggio 1, centro in $(1,0)$)
DUNQUE S è il grafico della funzione $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ su $\bar{\Omega}$
dove $\Omega = \{ x^2 + y^2 < 9, (x-1)^2 + y^2 > 1 \}$. Nota che g è C^1 su Ω
e C^0 su $\bar{\Omega}$. DUNQUE S è una superficie parametrica
Ne segue

$$A(S) = \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{1 + |\nabla g(x,y)|^2}\, dx\, dy = \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$\iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, \mathrm{Mis}(\bar{\Omega}) =$$

$$\sqrt{2}\left(\mathrm{mis}(\text{cerchio di raggio } 3) - \mathrm{mis}(\text{cerchio di raggio } 1)\right) =$$

$$\sqrt{2}(9\pi - \pi) = 8\sqrt{2}\pi$$

2. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$D := \{(x,y,z) : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \ge 1\}, \quad L := \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 3\},$$
$$B := \{(x,y,z) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, z = 0\}, \quad S := \{(x,y,z) : z = 4 - x^2 - y^2, 0 \le z \le 3\},$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare e che $\partial D = S \cup L \cup B$. Indichiamo con $\hat{\nu}$ la normale unitaria a ∂D, uscente da D. Consideriamo anche il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := (x^2 + y^2 + z^2)(y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$$

e le tre curve $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definite da:

$$\gamma_1(t) = \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}}, \quad \gamma_2(t) = \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}, \quad \gamma_3(t) = 2\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + 2\sin(t)\vec{\mathbf{j}}.$$

Ricordiamo che $\gamma_i([0,2\pi])$ (il sostegno di γ_i) indica l'insieme dei punti $\gamma_i(t)$, quando t varia in $[0, 2\pi]$.

(a) Si indichi quale tra le seguenti affermazioni è corretta. (2 pt.)

- A $\Sigma^*(S \cup B) = \gamma_3([0,2\pi])$, $\Sigma(S \cup B) = \gamma_1([0,2\pi]) \cup \gamma_2([0,2\pi])$;
- B $\Sigma^*(S \cup B) = \gamma_1([0,2\pi]) \cup \gamma_2([0,2\pi]) \cup \gamma_3([0,2\pi])$, $\Sigma(S \cup B) = \emptyset$;
- C $\Sigma^*(S \cup B) = \gamma_1([0,2\pi]) \cup \gamma_2([0,2\pi]) \cup \gamma_3([0,2\pi])$, $\Sigma(S \cup B) = \gamma_1([0,2\pi]) \cup \gamma_2([0,2\pi])$;
- D $\Sigma^*(S \cup B) = \gamma_1([0,2\pi]) \cup \gamma_2([0,2\pi]) \cup \gamma_3([0,2\pi])$, $\Sigma(S \cup B) = \gamma_1([0,2\pi]) \cup \gamma_3([0,2\pi])$;
- E nessuna delle precedenti.

(b) Si indichi quale tra le seguenti affermazioni è corretta. (1 pt.)

- A γ_1 e γ_2 descrivono il bordo di L in maniera concorde con $\hat{\nu}$;
- B γ_1 e γ_2 descrivono il bordo di L in maniera discorde con $\hat{\nu}$;
- C γ_1 e γ_2 descrivono il bordo di L, γ_1 in maniera concorde con $\hat{\nu}$ e γ_2 in maniera discorde;
- D γ_1 e γ_2 descrivono il bordo di L, γ_2 in maniera concorde con $\hat{\nu}$ e γ_1 in maniera discorde;
- E γ_1 e γ_2 non descrivono il bordo di L.

(c) Si calcoli la normale: (1 pt.)

$$\hat{\nu}(1,-1,2) = \boxed{\frac{2}{3}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-\frac{2}{3}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{\frac{1}{3}}\,\vec{\mathbf{k}} \quad / \quad \boxed{\text{non esiste}}$$

(d) Si calcoli la normale: (1 pt.)

$$\hat{\nu}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}} \quad / \quad \boxed{\text{non esiste}}$$

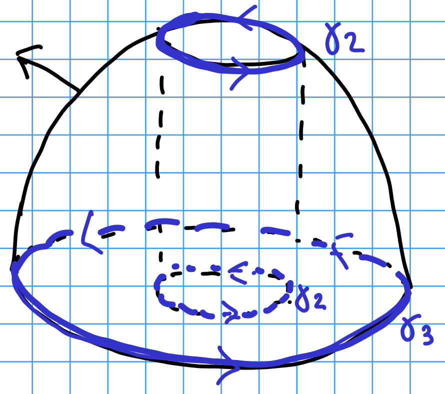
(e) Si dica se $\vec{f}$ è conservativo VERO FALSO. (1 pt.)

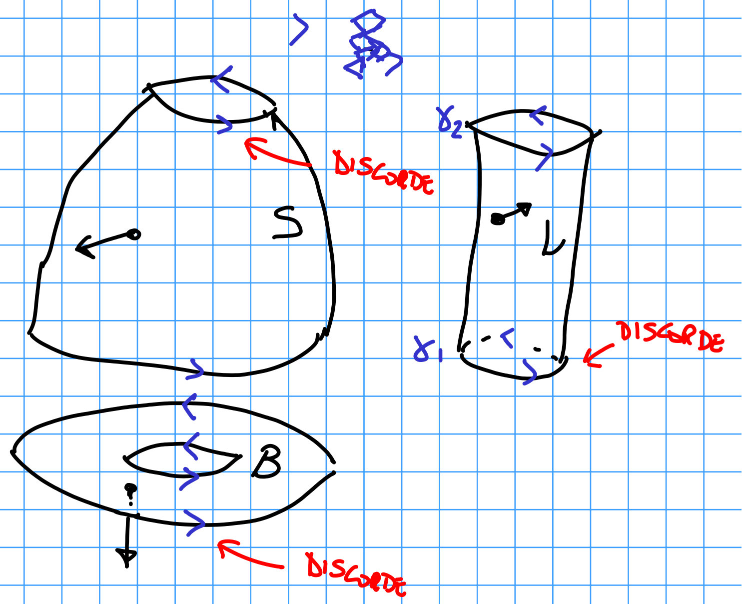
(f) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$: (5 pt.)

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{117}{4}\pi}$$

(g) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$: (5 pt.)

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{-12\pi}.$$





Se pongo $G_1 = z + x^2 + y^2 - 4$, $G_2 = -z$, $G_3 = 1 - x^2 - y^2$, $G_4 = z - 3$

$$D = \{G_1 \le 0, G_2 \le 0, G_3 \le 0, G_4 \le 0\} \Rightarrow$$

$$\partial D = \underbrace{\{G_1 = 0\} \cap D}_{S} \cup \underbrace{\{G_2 = 0\} \cap D}_{B} \cup \underbrace{\{G_3 = 0\} \cap D}_{L} \cup \underbrace{\{G_4 = 0\} \cap D}_{\substack{\Downarrow \\ S \cap L}}$$ (è già nei precedenti)

(c) $P = (1, -1, 2)$. Allora $\underline{G_1(P) = 0}$, $G_2(P) < 0$, $G_3(P) < 0$ $(P \in S)$

$$\Rightarrow \hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G_1(P)}{\|\nabla G_1(P)\|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{1/2}}\Bigg|_{\substack{x=1\\ y=-1\\ z=2}} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$$

(d) $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ $G_1(P) < 0$ $G_2(P) < 0$ $\underline{G_3(P) = 0}$ $(P \in L)$

$$\hat{\nu}(P) = \frac{\nabla G_3}{\|\nabla G_3\|} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j}}{(4x^2 + 4y^2)^{1/2}}\Bigg|_{\substack{x = \sqrt{2}/2\\ y = \sqrt{2}/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

(e) Per esempio

$$\frac{\partial}{\partial y} f_2 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)(-x) = -2xy$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)(y) = 2xy$$

$\neq$

(f) Notiamo che $\iint_B \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iint_B \vec{f}\,(-\vec{k})\, d\sigma = -\iint_B \underbrace{f_3(x, y, 0)}_{=0}\, dx\,dy \Rightarrow 0$

e $\iint_L \vec{f}\, \hat{\nu}\, dx\, dy = 0$ di nuovo perché, se $(x, y, z) \in L$

$$\vec{f}(x,y,z)\cdot\hat{\nu}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)(y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k})\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}) = 0$$

Allora $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy\,dz =$

$$\iiint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)y + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)(-x) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)z \right) dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_D (3z^2+x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\{1\le x^2+y^2\le 4\}} \left[z^3 + (x^2+y^2)z \right]_0^{4-x^2-y^2} =$$

$$\iint_{\{1\le x^2+y^2\le 4\}} (4-x^2-y^2)\left((4-x^2-y^2)^2 + x^2+y^2\right) dx\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (4-\rho^2)\left((4-\rho^2)^2+\rho^2\right)\rho\, d\rho = \quad \left(s=\rho^2 \quad \rho\, d\rho = \frac{ds}{2}\right)$$

$$\pi\int_1^4 (4-s)\left((4-s)^2+s\right) ds = \pi\int_1^4 (4-s)(16-7s+s^2)\,ds$$

$$= \pi\int_1^4 (64-28s+4s^2-16s+7s^2-s^3)\,ds =$$

$$= \pi\int_1^4 (64-44s+11s^2-s^3)\,ds = \frac{117}{4}\pi$$

(b) Si può usare il teorema di Stokes:

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\partial(S)} \vec{f}\cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot ds + \int_{\gamma_3} \vec{f}\cdot d\vec{s} = (*)$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(t)+\sin^2(t)+9)\left(\sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + 3\vec{k}\right)\left(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\right) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} 10\,(-1)\,dt = -20\pi$$

ANALOGAMENTE

$$\int_{\gamma_3} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t) =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(4\cos^2(t)+4\sin^2(t)\right)\left(2\sin(t)\vec{i} - 2\cos(t)\vec{j}\right)\left(-2\sin(t)\vec{i}+2\cos(t)\vec{j}\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\,(4)\,(-1)\,dt = -32\pi$$

DUNQUE

$$(*) = 20\pi - 32\pi = -12\pi$$

3. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = 4x - y - 2z + 4e^t \\ z' = 4x - 3z + 4e^t \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B(t) := e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (2 pt.)

$\lambda_1 =$ -1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 3 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 2;

$\lambda_2 =$ $\quad m_A(\lambda_2) =$ $\quad m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

2. Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $x(t) = ae^t$, $y(t) = be^t$, $z(t) = ce^t$, , oppure si scriva “non esiste”: (4 pt.)

$\bar{x}(t) =$ $-e^t$

$\bar{y}(t) =$ 0

$\bar{z}(t) =$ 0

3. Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (6 pt.)

$x(t) =$ $-e^t + (2t+1)e^{-t}$

$y(t) =$ $4t\, e^{-t}.$

$z(t) =$ $4t\, e^{-t}$

Fine Test

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$. Polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 4 & -1-\lambda & -2 \\ 4 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)\Big((1-\lambda)(-3-\lambda) + 4\Big) =$$

$$-(1+\lambda)\Big((\lambda-1)(\lambda+3)+4\Big) = -(1+\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(1+\lambda)^3$$

$\lambda = -1$ UNICO AUTOVALORE $m_A = 3$

$$B := A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow$$ HA RANGO 1, $\dim \mathrm{Ker} = 2$

$m_G = 2$

- Cerco $\overline{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t \Rightarrow \overline{Y}' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^t$ e allora

$$Y' - AY = e^t \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\} = e^t \begin{pmatrix} a - a + c \\ b - 4a + b + c \\ c - 4a + 3c \end{pmatrix} =$$

$$e^t \begin{pmatrix} c \\ -4a + 2b + c \\ -4a + 4c \end{pmatrix} \leftarrow \text{DEVE FARE} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} e^t \iff \begin{matrix} c = 0 & a = -1 \\ & b = 0 \end{matrix}$$

DUNQUE $\overline{Y}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$.

- Cerco $Y(t) = \overline{Y}(t) + Y_0(t)$ con $\overline{Y}$ quello sopra e Y_0 sol. dell'omogeneo. So $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ allora $Y_0(0) = -\overline{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Troviamo la forma di Jordan di A per calcolare e^{tA}.

Dato che B ha Ker di dimensione 2 ($\Rightarrow B^2 = 0$) devo trovare e_3 con $Be_3 \neq 0$. Posso prendere $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di modo che $e_2 = Be_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Mi serve $e_1 \in \mathrm{Ker}\, B$ con e_1 e e_2 indipendenti. Ma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, B \iff z = 2x$ (e nessuna condizione su y). Allora posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

DUNQUE SE $M = \left[e_1 \middle| e_2 \middle| e_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = MJM^{-1}$$

Allora $Y_0(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M e^{tJ} M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M e^{tJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Perché $M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) $= e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$e^{-t} M \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 4t \\ 4t \end{pmatrix}$$