COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è un ora e venti minuti.

Inizio Test

1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) := \frac{1}{1+(x-n)^2}$$

(a) Si trovi il limite puntuale f delle f_n (se esiste): (1 pt.)

$f(x) =$ 0 / non esiste.

(b) Si dica se f_n converge uniformemente a f: SI ~~NO~~. (1 pt.)

(c) Si dica se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente (su $\mathbb{R}$): ~~SI~~ NO. (1 pt.)

(d) Si dica, fornendo una breve motivazione, se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente (su $\mathbb{R}$):

SI ~~NO~~ perché: (3 pt.)

Se $\sum f_n$ converge unif. $\Rightarrow f_n \to 0$ unif.

Ma questo è falso per (b). (In effetti

$\|f_n\|_\infty = 1$ perché $\max_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = f_n(n) = 1$)

2. Si consideri il seguente campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$\vec{f}(x,y,z) := (x+y)\vec{\mathbf{i}} + (x+y-z)\vec{\mathbf{j}} - (y+2z)\vec{\mathbf{k}}$$

(a) Si trovi un potenziale F per $\vec{f}$ se esiste oppure si scriva "non esiste" (2 pt.)

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 + xy - yz$$

(b) Si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$ se esiste oppure si scriva "non esiste" (2 pt.)

$$\vec{F}(x,y,z) = \left((x+y)z - \frac{z^2}{2}\right)\vec{i} - \left((x+y)z + xy\right)\vec{j} \quad (*)$$

(c) Si consideri la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = \sin(t)\vec{\mathbf{i}} + \cos(t)\vec{\mathbf{j}} + t\vec{\mathbf{k}}$. (2 pt.)
Si calcoli l'integrale curvilineo di $\vec{f}$ sulla curva γ:

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \pi - \pi^2$$

/ non esiste

(d) Si dica se $\vec{F} + \vec{f}$ è ancora un potenziale vettore per $\vec{f}$: ~~SI~~ NO. (2 pt.):

(*) Un altro pot. vettore è il seguente (+ infiniti altri...)

$$\vec{F}(x,y,z) = \left((x+y)z + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right)\vec{i} - \left((x+y)z\right)\vec{j}$$

$$\vec{f}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}+(x+y-z)\vec{j}-(y+2z)\vec{k}$$

(a) Cerco un potenziale F:

- $\frac{\partial F}{\partial x}=x+y \Rightarrow F=\frac{x^2}{2}+xy+\cos t(y\,z)$
- $\frac{\partial F}{\partial y}=x+y-z \Rightarrow F=xy-yz+\frac{y^2}{2}+\cos t(x,z)$
- $\frac{\partial F}{\partial z}=-(y+2z) \Rightarrow F=-yz-z^2+\cos t(x,y)$

Si vede che $F=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^2+xy-yz$ è un potenziale

(b) Notiamo che $\operatorname{div}(\vec{f})=1+1-2=0 \Rightarrow$ esiste pot. vettore.

Cerco $\vec{F}: F_1\vec{i}+F_2\vec{j}$ $(F_3=0)$. Allora

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\det\begin{bmatrix} i & D_x & F_1 \\ j & D_y & F_2 \\ k & D_z & 0\end{bmatrix}=-D_zF_2\vec{i}+D_zF_1\vec{j}+(D_xF_2-D_yF_1)\vec{k}$$ da cui

- $D_zF_2=-f_1=-(x+y) \Rightarrow F_2=-(x+y)z+c(x,y)$
- $D_zF_1=f_2=x+y-z \Rightarrow F_1=(x+y)z-\frac{z^2}{2}+d(x,y)$
- Deve essere $-(y+2z)=D_xF_2-D_yF_1=-z+D_xc(x,y)-z-D_yd(x,y)$

$\Leftrightarrow -y=D_xc(x,y)-D_yd(x,y)$. Per esempio $d=0$, $c=-xy$, $d=0$

DUNQUE TROVO   OPPURE $c=0$ $d=\frac{y^2}{2}$

$$\vec{F}(x,y,z)=\left((x+y)z-\frac{z^2}{2}\right)\vec{i}-\left((x+y)z+xy\right)\vec{j}$$

OPPURE $=\left((x+y)z+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2}\right)\vec{i}-\left((x+y)z\right)\vec{j}$ (o altro ...)

(c) Dato che $\vec{f}$ è conservativo $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=$

$F(\gamma(\pi))-F(\gamma(0))=F(0,-1,\pi)-F(0,1,0)=$

$$\left[\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^2+xy-yz\right]_{x=0,y=1,z=0}^{x=0,y=-1,z=\pi}=\left(\frac{1}{2}-\pi^2+\pi\right)-\left(\frac{1}{2}\right)=\pi-\pi^2$$

(d) Dato che $\vec{f}$ è conservativo $\operatorname{rot}\vec{f}=\vec{0} \Rightarrow$

$\operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{f})=\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{f}$

3. Si consideri la funzione f definita da:

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq \frac{3}{4}\pi; \\ 3(\pi - t) & \text{se } \frac{3}{4}\pi \leq t \leq \pi; \\ -3(\pi + t) & \text{se } -\pi \leq t \leq -\frac{3}{4}\pi; \end{cases}$$

ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da risultare 2π-periodica.

(a) Si calcolino i coefficienti di Fourier per f (relativi al periodo $T = 2\pi$). (6 pt.)

$a_0 =$ 0 e per $n \geq 1$

$a_n =$ 0

$b_n =$ $\frac{8}{n^2\pi} \sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$

(b) Si dica se la serie di Fourier converge uniformemente e si giustifichi brevemente la risposta nello spazio sottostante

~~SI~~ NO perché (3 pt.)

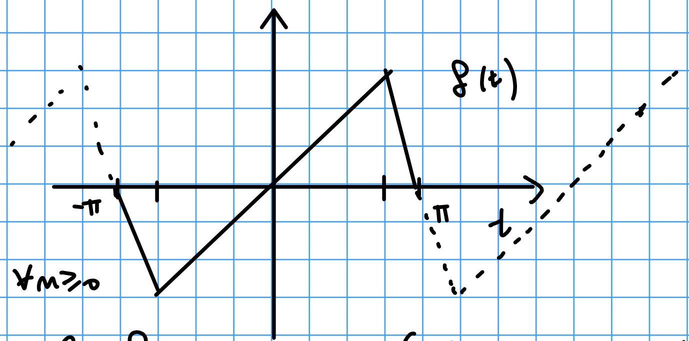
$|b_n| \leq \frac{8}{n^2\pi} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} |b_n| < +\infty$

(c) Si trovi la somma S della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{3\pi^2}{32}}.$$

(3 pt.)

(3) Se faccio il grafico di f trovo:



Noto che $\underline{f \text{ è dispari}}$

(3a) Dato che f è dispari $a_n = 0 \ \forall n \geq 0$

Per quanto riguarda b_n uso la formula: $(T = 2\pi, \omega = 1)$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = (\text{per parti}) = \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[f(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ perché } f(0)=f(\pi)=0}$$

$$+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left(\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\cos(nt)\,dt - 3\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right) =$$

$$\frac{2}{n\pi}\left(\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} - 3\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left(\sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right) + 3\sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)\right)$$

$$= \frac{8}{n^2\pi}\sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$$

(3c) Se prendo $t = \frac{3}{4}\pi$ ho

$$\frac{3}{4}\pi = f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{3}{4}\pi\right) = \sum_1^{\infty}\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)^2\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}\pi = \frac{8}{\pi}\sum_1^{\infty}\sin^2\left(\frac{3}{4}\pi n\right)\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sum \sin^2\left(\frac{3}{4}\pi n\right)\frac{1}{n^2} = \frac{3}{32}\pi^2$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$x(2x+1)y'' - (4x+1)y' - 12y = 12 + 4x^3. \quad .$$

Diamo per buono che le soluzioni definite vicino a zero si possono esprimere come una serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(a) Si scriva una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (2 pt.)

$(\mathcal{R})$

$$a_{n+1}(n+1)(n-1) + 2a_n(n^2-3n-6) = \begin{cases} 12 & n=0 \\ 4 & n=3 \\ 0 & n\neq 3, n\neq 0 \end{cases}$$

oppure

$a_0=-1$, $a_1=0$, a_2 LIBERO, $a_3=\frac{16}{3}a_2$, $a_4=\frac{1}{2}+8a_2$

$$a_{n+1} = 2\,\frac{n^2-3n-6}{n^2-1}\,a_n \quad \forall n\geq 4$$

(b) Si indichi quale delle seguenti affermazioni è corretta: (2 pt.)

(b.1) Non esiste nessuna soluzione y con $y(0)=-1$ VERO | FALSO;

(b.2) esiste un'unica soluzione y con $y(0)=-1$ VERO | FALSO;

(b.3) esistono infinite soluzioni y con $y(0)=-1$ ~~VERO~~ | FALSO;

(b.4) nessuna delle precedenti.

(c) Si dica qual è il raggio di convergenza R delle soluzioni: (2 pt.)

$R =$ ⁄ ~~non è lo stesso per tutte le soluzioni~~

(d) Si dica se esiste una soluzione y tale che y è un polinomio di terzo grado e in caso affermativo si trovi y: (4 pt.)

$$y(x) = -1 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

⁄ non esiste

(e) Si dica se esiste una soluzione y tale che $y'''(0)=0$ in caso affermativo si trovi y: (4 pt.)

$y(x) = -1 + \sum_{n=4}^{\infty} a_n x^n$ dove $a_4 = \frac{1}{2}$ e vale $(\mathcal{R})$ per $n\geq 4$

⁄ non esiste.

Fine Test

(4)

$$x(2x+1)y'' - (4x+1)y' - 12y = 12 + 4x^3$$

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)x^n$

$$y''(x) = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)n x^{n-1}$$

DUNQUE

$$x(2x+1)y'' - (4x+1)y' - 12y = 2x^2y'' + xy'' - 4xy' - y' - 12y =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \{ 2a_n n(n-1) + a_{n+1}(n+1)n - 4a_n n - a_{n+1}(n+1) - 12a_n \} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \{ a_n(2n^2 - 2n - 4n - 12) + a_{n+1}(n+1)(n-1) \} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \{ 2a_n(n^2 - 3n - 6) + a_{n+1}(n+1)(n-1) \} x^n$$

Noto che $n^2 - 3n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$ ← NON SONO INTERI

NE RICAVO

$$(R) \quad a_{n+1}(n+1)(n-1) + 2a_n(n^2 - 3n - 6) = \begin{cases} 12 & \text{se } n=0 \\ 4 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mettiamo alcuni valori di n:

$n=1 \rightarrow \quad a_2(2)(0) + 2a_1(1-3-6) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$n=0 \rightarrow \quad \underset{0}{a_1}(1)(-1) + 2a_0(-6) = 12 \Rightarrow a_0 = -1$

$n=2 \rightarrow \quad a_3(3)(1) + 2a_2(4-6-6) = 0 \Leftrightarrow$

$3a_3 = 16a_2 \quad \Leftrightarrow a_3 = \frac{16}{3}a_2$

$n=3 \quad a_4(4)(2) + 2a_3(9-9-6) = 4$

$8a_4 - \cancel{12}^{4} \frac{16}{\cancel{3}} a_2 = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2} + 8a_2$

a_2 è libero. Da $n=4$ in avanti ho la relazione

$$a_{n+1} = -2\frac{n^2 - 3n - 6}{n^2 - 1} a_n \qquad n \geq 4$$

IN REALTÀ L'ESERCIZIO È STATO TRASCRITTO MALE

E QUINDI ALCUNE RISPOSTE NON TORNANO BENE

SI TERRÀ CONTO DI QUESTO NELLA CORREZIONE

(b) Dato che ogni soluzione ha $a_0 = -1$ (e ci sono infinite soluzioni - facendo variare a_2) $\Rightarrow \exists\ \infty$ sol. a $y(0)=1$

(d) Posso scegliere a_2 in modo che $a_4 = 0$. Questo si fa imponendo che $a_4 = \frac{1}{2} + 8a_2 = 0 \iff a_2 = -\frac{1}{16}$

Se $a_4 = 0$ allora da (R) $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 5$ e quindi y è un polinomio di grado 3. Sempre usando (R) trovo $a_3 = -\frac{1}{3}$ e dunque

$$y(x) = -1 - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

(c) Dalla (d) vedo che, se $a_2 = -\frac{1}{16}$, y è un polinomio dunque $R=0$. Se ~~invece se~~ $2\frac{n^2-3n-6}{n^2-1}$ $a_2 \neq -\frac{1}{16}$ si vede che $a_4 \neq 0$ e da (R) ho $a_n \neq 0$. Usando Cesaro:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n 2\frac{n^2-3n-6}{n^2-1} = 2$$

dunque $R = \frac{1}{2}$ se $a_2 \neq -\frac{1}{16}$

(e) Due punti e chi ha fatto i punti precedenti. Se impongo $y'''(0)=0$ ho $a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$, $a_4 = \frac{1}{2}$ e dunque

$$y(x) = -1 + \frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty} \hat{a}_n x^n \quad \text{dove}$$

$$\hat{a}_4 = 1 \qquad \hat{a}_{n+1} = 2\frac{n^2-3n-6}{n^2-1}\hat{a}_n \quad n \geq 4$$

Oppure $y(x) = -1 + \sum a_n x^n$ con $a_4 = \frac{1}{2}$ e $a_{n+1} = 2\frac{n^2-3n-6}{n^2+1}$