Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 21 aprile 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40**. Il tempo a disposizione è due ore e venti minuti-

Inizio Test

1. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma : \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$\gamma(t) := t^2\vec{\mathbf{i}} - t^3\vec{\mathbf{j}}.$$

$\ell(\gamma) = \boxed{\dfrac{112}{27}}$ (4 pt.)

2. Si consideri il campo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := \frac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Si indichi la risposta corretta ai seguenti quesiti.

(a) $\vec{f}$ è irrotazionale ~~SI~~ NO; (1 pt.)

(b) $\vec{f}$ è conservativo ~~SI~~ NO; (1 pt.)

(c) $\vec{f}$ è solenoidale ~~SI~~ NO; (1 pt.)

(d) $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore SI ~~NO~~. (1 pt.)

(1) $\gamma(t) = (t^2, -t^3)$ $\quad \gamma'(t) = (2t, -3t^2)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = |t|\sqrt{4+9t^2}$$

$$\ell(\gamma) = \int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_{-2/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} |t|\sqrt{4+9t^2} = 2\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} t\sqrt{4+9t^2}\, dt$$

$s = 4 + 9t^2$ $\quad ds = 18t\, dt \rightarrow$

$$= \frac{2}{18}\int_4^{4+9\frac{4}{3}} \sqrt{s}\, ds = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_4^{16} = \frac{2}{27}\left((2^4)^{3/2} - (2^2)^{3/2}\right) =$$

$$\frac{2}{27}\left(2^6 - 2^3\right) = \frac{16}{27}(8-1) = \frac{112}{27}$$

(2) Per (a) e (b) si può usare il fatto che $\vec{f}$ è RADIALE

Per (c) si fa il calcolo

(d) Se esistesse $\vec{F}$: $\operatorname{rot}\vec{F} = f$ allora, considerando

S = sfera unitaria, avrei

$$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\partial(S)} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$ perché S non ha bordo!!

Ma d'altra parte $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, ds > 0$ visto che

$\vec{f}\cdot\vec{\nu} = 1$ su ogni punto di S (l'integrale fa 4π = area di S)

(3) (a) Se $\Gamma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$ è chiaro che

Γ è il grafico della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ (su T)

(b) Dato che $\Gamma(1,0) = (1, \ , 1^2 - 0^2) = (1,0,1) = P_0$

allora P_0 è nel sostegno di Γ.

(c) Si ha $\frac{\partial\Gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix}1\\0\\2u\end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial\Gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2v\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial\Gamma}{\partial u}\otimes\frac{\partial\Gamma}{\partial v} = \det\begin{bmatrix}\vec{i} & 1 & 0\\ \vec{j} & 0 & 1\\ \vec{k} & 2u & -2v\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}-2u\\2v\\1\end{pmatrix}$$

dato che P_0 corrisponde a $u=1$ $v=0$ si ha $\vec{N} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

3. Si consideri la superficie parametrica $\Gamma : T \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\Gamma(u,v) = u\vec{\mathbf{i}} + v\vec{\mathbf{j}} + (u^2 - v^2)\vec{\mathbf{k}} \qquad T := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le u \le 2, |v| \le u\}.$$

(a) Si dica se Γ è una superficie cartesiana (un grafico) ~~SI~~ NO: (1 pt.)

(b) Si dica se il punto $P_0 := (1,0,1)$ è nel sostegno della curva: ~~SI~~ NO; (1 pt.)

(c) Si trovi il vettore normale $\vec{N}$ alla superficie (indotto dalla parametrizzazione Γ) nel punto $P_0 = (1,0,1)$:

$\vec{N}(P_0) = \boxed{-2}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{1}\,\vec{\mathbf{k}}$ / non esiste; (1 pt.);

(d) Si calcoli il flusso attraverso la superficie (usando la parametrizzazione Γ) del campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da: (5 pt.)

$$\vec{f}(x,y,z) := x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$$

$$\int_\Gamma \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{-\frac{16}{3}}.$$

4. Si consideri la funzione $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) := x.$$

Indichiamo con u_n i coefficienti dello sviluppo di Fourier di f in soli seni:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$$

(si noti che in generale non è detto che $S(x) = f(x)$)

(a) Si calcolino gli u_n:

$$u_n = \boxed{-\frac{2}{n}(-1)^n}$$ (4 pt.)

(b) Si indichi il valore a cui converge la serie nel punto $x = \pi$:

$$S(\pi) = \boxed{0}$$ (1 pt.)

(c) Si indichi il valore a cui converge la serie nel punto $x = \frac{\pi}{2}$:

$$S(\pi/2) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$ (1 pt.)

(d) Si dica se la serie converge uniformemente SI ~~NO~~. (1 pt.)

(d) Uso la definizione:

$$\iint_\Gamma \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_T \vec{f}(\Gamma(u,v))\cdot\vec{N}(u,v)\,du\,dv =$$

$$\iint_T (u\vec{i}+v\vec{j}+(u^2-v^2)\vec{k})(-2u\vec{i}+2v\vec{j}+\vec{k})\,du\,dv$$

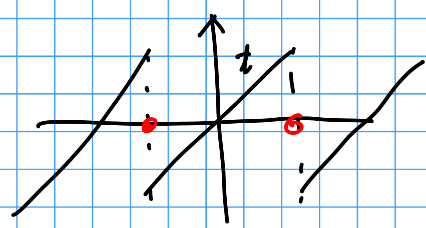
$$= \iint_T (-2u^2+2v^2+u^2-v^2)\,du\,dv = \iint_T (v^2-u^2)\,du\,dv$$

$(T = \{0\le u\le 2 \quad -u\le v\le u\})$ $= \displaystyle\int_0^2\left(\int_{-u}^{u}(v^2-u^2)\,dv\right)du =$

$$\int_0^2\left[\frac{v^3}{3}-u^2v\right]_{-u}^{u}du = \int_0^2 2\left(\frac{u^3}{3}-u^3\right)du = -\int_0^2\frac{4}{3}u^3\,du =$$

$$-\frac{1}{3}\left[u^4\right]_0^2 = -\frac{16}{3}$$

(4) Come noto lo sviluppo in soli seni corrisponde allo sviluppo della "disparizzata" su $[-\pi,\pi]$



(a) Si ha $u_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi t\sin(nt)\,dt =$

$$\frac{2}{\pi}\left[t\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\cancel{\pi}}\cancel{\pi}\,\frac{-\cos(n\pi)}{n} + \underbrace{\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

(b) In π $S(x)$ converge a $\dfrac{f(\pi^+)+f(-\pi^-)}{2} = \dfrac{\pi-\pi}{2} = 0$

(c) Se $x \ne \pi+2k\pi$ $S(x)=f(x) \Rightarrow S(\frac{\pi}{2}) = \pi/2$

(d) La $S(x)$ è discontinua $\Rightarrow$ la serie non può convergere unif

$(S(x)=x$ se $x\ne\pi+2k\pi$, $S(\pi+2k\pi)=0)$

5. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $D \subset \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$f(x,y,z) := 2x + 2y - z \quad , \quad D := \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \le 1\}$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare in $\mathbb{R}^3$.

(a) Si riportino nelle caselle sottostanti tutti i possibili punti critici **vincolati** di f su D (possono essere meno di otto): (7 pt.)

$(x,y,z) =$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$ $\quad$ $(x,y,z) =$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$

$(x,y,z) =$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$ $\quad$ $(x,y,z) =$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$

$(x,y,z) =$ $\quad$ $(x,y,z) =$

$(x,y,z) =$ $\quad$ $(x,y,z) =$

(b) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{P \in D} f(P) = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

(c) Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\max_{P \in D} f(P) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$f = 2x + 2y - z \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$D = \{ G_1 \leq 0, G_2 \leq 0 \}$ dove $G_1 = x^2+y^2+z^2-4 \qquad G_2 = x^2+y^2-1$

$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

Cerco tutti i pt. critici

(1) $\nabla f = 0 \quad G_1 < 0 \quad G_2 < 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ IMPOSSIBILE

(2A) $\nabla f = \lambda \nabla G_1, \; G_1 = 0, \; G_2 < 0$ cioè

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ -1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 4, \; x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda \neq 0, \; x = \frac{1}{\lambda} \quad y = \frac{1}{\lambda} \quad z = -\frac{1}{2\lambda} \Leftrightarrow x = y = 2z$

e allora $4z^2+4z^2+z^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow z = \pm\frac{2}{3}$

e trovo i punti $\pm\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

però questi punti hanno $x^2+y^2 = \frac{16}{9}+\frac{16}{9} = \frac{32}{9} > 0 \Leftarrow$ NON ACCETTABILI

(2B) $\nabla f = \lambda G_2 \quad G_1 < 0 \quad G_2 = 0$ cioè

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ -1 = 0 \\ \text{- - - -} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ IMPOSSIBILE

(3) $\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2, \quad G_1 = G_2 = 0$ cioè

$$\begin{cases} 2 = (\lambda+\mu) 2x \\ 2 = (\lambda+\mu) 2y \\ 1 = \mu \, 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 4, \; x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

Dalle ultime due segue $z^2 = 3 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}$

Dalle prime due segue $x = y$ e allora $x^2+x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

IN DEFINITIVA TROVO QUATTRO PUNTI $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \; \frac{\sqrt{2}}{2} \; \sqrt{3}\right)$ e $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \; \frac{\sqrt{2}}{2} \; -\sqrt{3}\right)$

Se calcolo f in questi punti trovo

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \; -\frac{\sqrt{2}}{2} \; -\sqrt{3}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right) = \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{3}}_{\text{MAX}}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \; -\frac{\sqrt{2}}{2} \; +\sqrt{3}\right) = \underbrace{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}_{\text{MIN}}$

6. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z - 1 \\ y' = 3x - y + 2z + 1 \\ z' = x - y + 2z + 3 \end{cases} \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 2 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ 2 $\quad m_A(\lambda_2) =$ 1 $\quad m_G(\lambda_2) =$ 1 ;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

2. Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ **costante** di (Sys), oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$\bar{x}(t) =$ 1

$\bar{y}(t) =$ 0

$\bar{z}(t) =$ -2

3. Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$: (5 pt.)

$x(t) =$ $-e^t + 1$

$y(t) =$ $t e^t$

$z(t) =$ $(t+2)e^t - 2$

Fine Test

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$. Calcolo il pol. caratteristico:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 3 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) - 2 - 3 - \{(3-\lambda)(-2) + (2-\lambda)(-3) + (-1-\lambda)\} =$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda - 3)(2-\lambda) - 5 - \{-6 + 2\lambda - 6 + 3\lambda - 1 - \lambda\} =$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda - 3)(2-\lambda) + 8 - 4\lambda = (\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4)(2-\lambda) =$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)(2-\lambda) = (\lambda-1)^2(2-\lambda)$$

Trovo $\lambda_1 = 1$ $m_A(\lambda_1) = 2$ $\lambda_2 = 2$ $m_A(\lambda_2) = 1$

Per quanto segue cerchiamo la forma di Jordan di A.

$\lambda = \lambda_1 = 1$ Prendo $B = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vedo che B ha rango 2 $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} B = 1$. $\Rightarrow m_G(1) = 1$.

(b) Se $\bar{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{Y}' = 0$ da cui trovo la condizione $0 = A\bar{Y} + B \iff$

$A\bar{Y} = -B$ cioè $\begin{cases} 3a - b + c = 1 \\ 3a - b + 2c = -1 \\ a - b + 2c = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a - b + c = 1 \\ -c = 2 & \text{I}-\text{II} \\ 2a = 2 & \text{II}-\text{III} \end{cases}$

$\Rightarrow a = 1 \quad b = 0 \quad c = -2$

DUNQUE $\bar{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) Cerco $Y = Y_0 + \bar{Y}$ con $Y_0' = AY_0$ (sol. dell'omogenea)

Se impongo la condizione in $t=0 \Rightarrow$ $0 = Y(0) = Y_0(0) + \bar{Y} \iff Y_0(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Per calcolare Y_0 devo trovare la forma di Jordan di A. Considero di nuovo $B = A - I$. Faccio B^2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cerco e_2 tale che $B^2 e_2 = 0$ e $Be_2 \neq 0$. Noto che il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (cioè $Y_0(0)$) va bene! Prendo $e_1 = Be_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 \\ -3+4 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Cerco infine $e_3 \in \operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ Posso prendere

$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. DUNQUE SE $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e

$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ si ha $A = M J M^{-1}$.

Allora la sol Y_0 è data da $Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) =$

$M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0)$. Per come è stata presa M si ha $M\hat{e}_2 = e_2$

$\Rightarrow M^{-1} e_2 = M^{-1} Y_0 = \hat{e}_2$. Dunque

$$Y_0(t) = M \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t =$$

$$e^t \begin{bmatrix} -1 \\ t \\ t+2 \end{bmatrix}$$

verifica. $Y_0(t) = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ t \\ t+2 \end{bmatrix}$ $\quad Y_0(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (torna)

$$Y_0'(t) = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ t \\ t+2 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ t+1 \\ t+3 \end{bmatrix}$$

TORNA

$$A Y_0(t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ t \\ t+2 \end{bmatrix} e^t = e^t \begin{bmatrix} -3 - t + t + 2 \\ -3 - t + 2t + 4 \\ -1 - t + 2t + 4 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ t+1 \\ 3+t \end{bmatrix}$$