Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino B del 24 marzo 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è un ora e venti minuti.

Inizio Test

1. Si trovi il valore del seguente integrale (se esiste): (7 pt.)

0 !

$$\iint_D \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2y^2}\, dxdy = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} / \boxed{\text{non esiste}}$$

dove

$$D := \{(x, y) : 0 \le x - y \le xy \le 1\}.$$ ← (*) vedi sotto

Si consiglia di usare la sostituzione $(t, s) = \Phi(x, y) := (x - y, xy)$, cioè $t = x - y$ e $s = xy$.

2. Si considerino la funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$G(x, y, z) := e^{xyz+2} + 2(x + y + z) - 5,$$

l'insieme

$$M := \{(x, y, x) : G(x, y, z) = 0\}$$

e il punto $P_0 := (2, 1, -1)$. È chiaro che $P_0 \in M$.

1. Per ognuna delle seguenti affermazioni si indichi se è deducibile dal teorema del Dini. (3 pt.)
   - [X] a esiste una funzione $x(y, z)$ definita per (y, z) vicino a $(1, -1)$, di classe $\mathcal{C}^1$ e tale che, vicino a P_0, M è il grafico di $x(y, z)$;
   - [ ] b esiste una funzione $y(x, z)$ definita per (x, z) vicino a $(2, -1)$, di classe $\mathcal{C}^1$ e tale che, vicino a P_0, M è il grafico di $y(x, z)$;
   - [X] c esiste una funzione $z(x, y)$ definita per (x, y) vicino a $(2, 1)$, di classe $\mathcal{C}^1$ e tale che, vicino a P_0, M è il grafico di $z(x, y)$;
2. se z è la funzione del punto precedente si calcoli: (3 pt.)

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2, 1) = \boxed{-\frac{1}{4}} / \boxed{\text{non esiste}};$$

3. si individui tra i seguenti vettori quali sono tangenti a M in P_0: (4 pt.):
   [ ] a $4\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{k}}$ [ ] b $\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ [X] c $4\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$ [ ] d $4\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$.

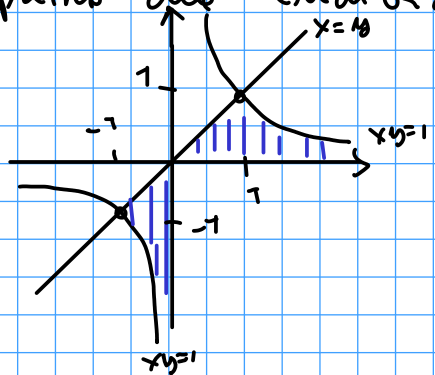
(1) Il risultato dell'integrale è ZERO. In realtà l'idea era di aggiungere la condizione $x+y \geq 0$ (o $x \geq 0$) in (*), ma per mia svista questa condizione non è stata trascritta. Nel caso $D = \{0 \leq x-y \leq xy \leq x,\ x+y \geq 0\}$ il risultato dell'integrale è $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. Dato il suggerimento considererò .

CORRETTE ENTRAMBE LE RISPOSTE.

Vediamo qual è lo svolgimento dell'integrale.

Se cerchiamo di disegnare D (quello del testo) abbiamo le condizioni $\boxed{y \leq x}$, $\boxed{0 \leq xy \leq 1}$ e $\boxed{x-y \leq xy}$.

Le prime due individuano la regione indicata sotto (in blu)



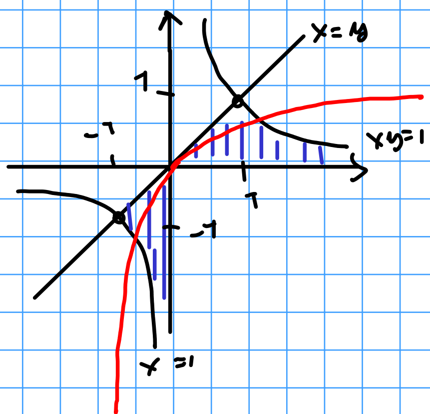
Notiamo che in questa regione $x \geq -1$.

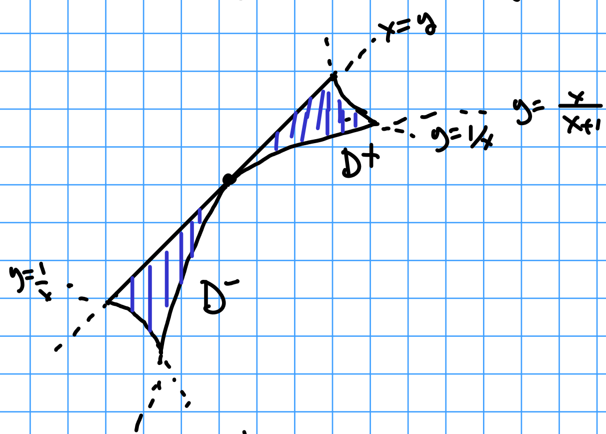
Se aggiungiamo la terza condizione:

$$x-y \leq xy \iff x \leq (x+1)y \iff y \geq \frac{x}{x+1}$$

(l'ultima diseguaglianza perché $x+1 \geq 0$)

Si vede che quest'ultima condizione è data dalla curva rossa, per cui l'insieme D è fatto così:





Posso scrivere $D = D^+ \cup D^-$ con D^+ nel I° quadrante e D^- nel III°.

Noto che D è simmetrico rispetto alla retta $x+y=0$ e cioè $(x,y) \in D \iff (-y,-x) \in D$ (questa simmetria è la composizione di $(x,y) \to (-x,-y)$ (antipodale) e di $(x,y) \to (y,x)$ (riflessione rispetto a $y=x$). Notiamo che

$$f(-y,-x) = -f(x,y). \qquad \left(\text{dove } f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{1+x^2y^2}\right)$$

Allora se poniamo $\psi(x,y) = (-y,-x)$ abbiamo che ψ è bigettiva (si vede facilmente) e che $J_\psi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det J_\psi = -1$ e $|\det J_\psi| = 1$. Inoltre $\psi(D^+) = D^-$

Allora

$$\iint_{D^+} f(\psi(x,y))\,|\det J_\psi(x,y)| = \iint_{D^-} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

Ma d'altra parte $\displaystyle\iint_{D^+} \underbrace{f(\psi(x,y))}_{-f(x,y)}\,\underbrace{|\det J_\psi(x,y)|}_{=1}\,dx\,dy = \iint_{D^+} -f(x,y)\,dx\,dy$

$$= -\iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy$$

VA DETTO che TUTTE QUESTI INTEGRALI ESISTONO FINITI dato che f è continua e D è limitato e chiuso. Dunque

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D^-} f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Vediamo come questo si confronta con il cambio di variabile proposto $\phi(x,y) = (x-y,\ xy)$

Il problema è che ϕ <u>NON È INIETTIVO SU D</u>

Infatti se $(x,y) \in D^+$ allora $(-y,-x) \in D^-$ e in questi due punti $\phi(x,y) = \phi(-y,-x)$.

Si vede facilmente che invece ϕ è iniettiva su D^+ / su D^-. Detto bene le restrizioni di ϕ a D^+ e di ϕ a D^- sono bigettive a valori nel "triangolo"

$T = \{(t,s) : 0 \le t \le s \le 1\}$. Se si calcola J_ϕ si trova $J_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_\phi = x+y$. Se applico il cambio di variabile su D^+ ho

$$\iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^+} \frac{x-y}{1+x^2y^2}(x+y)\,dx\,dy = \iint_{D^+} g(\phi(x,y))\,|\det J_\phi(x,y)|\,dx\,dy$$

$= \iint_T g(t,s)\,dt\,ds$ dove $g(t,s) = \frac{t}{1+s^2}$

<u>NOTA</u> $x+y \geq 0$ su D^+ per cui $x+y = |\det J_\phi(x,y)|$.

Continuando ho

$$\iint_T \frac{t}{1+s^2}\,dt\,ds = \int_0^1 \left(\int_0^s \frac{t}{1+s^2}\,dt \right) ds = \int_0^1 \frac{1}{1+s^2}\frac{s^2}{2}\,ds =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+s^2}\right) ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\arctan(1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Se invece facciamo lo stesso calcolo su D^-:

$$\iint_{D^-} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^-} \frac{(x-y)}{1+x^2y^2} \underbrace{(x+y)}_{=-|\det J_\phi|}\,dx\,dy =$$

$$\iint_{D^-} g(\phi(x,y))\left(-|\det J_\phi(x,y)|\right) dx\,dy = -\iint_T g(t,s)\,ds$$

e dunque si ha $\iint_{D^-} f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

(2) (1) Si ha $\nabla G(x,y,z) = \left(yze^{xyz+2} + 2,\ xze^{xyz+2} + 2,\ xye^{xyz+2} + 2\right)$

$$\nabla G(P_0) = (1,\ 0,\ 4)$$

Dato che $\frac{\partial G}{\partial x}(P_0) = 1 \neq 0$ vale la [a]

Dato che $\frac{\partial G}{\partial x}(P_0) = 4 \neq 0$ vale la [c]

Essendo $\frac{\partial G}{\partial y}(P_0) = 0$ NON posso APPLICARE DINI

(2) Per quanto visto $\frac{\partial z}{\partial x}(2,1) = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial x}G(P_0)}{\frac{\partial}{\partial z}G(P_0)} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

(3) I vettori tangenti sono quei $\vec{v}$ tali che $\nabla G(P_0)\cdot\vec{v} = 0$

Facendo i conti si vede che solo la $\boxed{c}$ è vera.

3. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $D \subset \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$f(x,y,z) := 2x - 2y + z \quad , \quad D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \ge 1\}$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare in $\mathbb{R}^3$.

1. Si riportino nelle caselle sottostanti tutti i possibili punti critici **vincolati** di f su D (possono essere meno di otto): (9 pt.)

$(x,y,z) =$	$\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(x,y,z) =$	$\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
$(x,y,z) =$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$	$(x,y,z) =$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$
$(x,y,z) =$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$	$(x,y,z) =$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$
$(x,y,z) =$		$(x,y,z) =$	

2. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{P \in D} f(P) = \boxed{-6}$$

3. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\max_{P \in D} f(P) = \boxed{+6}$$

Per questo esercizio è **richiesto lo svolgimento** da riportare (sinteticamente) di seguito continuando sul retro di questo foglio.

(3) Poniamo $f(x,y,z) = 2x - 2y + z$

$G_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4 \qquad G_2(x,y,z) = -x^2-y^2+1$

($\Rightarrow D = \{G_1 \le 0, G_2 \le 0\}$). Si ha

$\nabla f(x,y,z) = (2,-2,1) \qquad \nabla G_1 = (2x,2y,2z) \qquad \nabla G_2 = (-2x,-2y,0)$

(a) $\nabla f = 0$ IMPOSSIBILE

(b.1) $\nabla f = \lambda \nabla G_1$, $G_1 = 0$, $G_2 < 0$

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2>1 \end{cases}$$

FACCIO I QUADRATI E SOMMO $9 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 4\lambda^2(x^2+y^2+z^2) = 16\lambda^2$

DUNQUE $\lambda = \pm \frac{3}{4}$. Ricavo (x,y,z)

e trovo i punti $\pm\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

SI VEDE CHE $\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 > 1$ dunque vanno bene

(b.2) $\nabla f = \lambda \nabla G_2$ $G_1 < 0$ $G_2 = 0$

$$\begin{cases} 2 = -2\lambda x \\ -2 = +2\lambda y \\ 1 = 0 \\ x^2+y^2+z^2 < 4 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$\leftarrow$ IMPOSSIBILE

(c) $\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2 \qquad G_1 = G_2 = 0$

La condizione $G_1 = G_2 = 0$ equivale a $x^2+y^2=1$ $z = \pm\sqrt{3}$

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x - 2\mu x = 2(\lambda-\mu)x \\ -2 = 2\lambda y - 2\mu y = 2(\lambda-\mu)y \\ 1 = 2\lambda z - \mu \\ x^2+y^2 = 1 \quad z = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ \lambda \text{ e } \mu \text{ si trovano} \\ x^2+y^2=1 \quad z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

da cui trovo $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right)$ e $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right)$ (quattro punti)

IN QUESTI PUNTI CALCOLO $f \rightarrow$

$f\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$

$f\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -6$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3} \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{3} \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$

SI VEDE ALLORA CHE 6 è il max -6 è il min. (MAX e MIN ESISTONO PER WEIERSTRASS)

4. Si calcoli il seguente integrale (se esiste) : (12 pt.)

$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{z}\,dxdydz = \boxed{\frac{15}{8}\pi} \;/\; \boxed{\text{non esiste}}$$

dove:

$$D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 4,\, z+x^2+y^2 \ge 4\}$$

Anche di questo esercizio è **richiesto lo svolgimento** da riportare (sinteticamente) di seguito continuando sul retro del foglio.

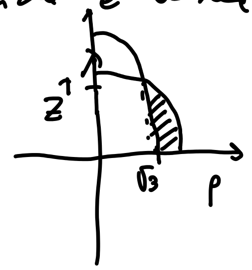
Fine Test

Noto che in coordinate cilindriche D si descrive come

$\rho^2+z^2 \le 4 \quad \rho^2+z \ge 4 \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

In particolare nei punti di D $\quad z^2 \le 4-\rho^2 \le z \Rightarrow z \ge z^2 \Rightarrow z \in [0,1]$

Dunque $f(x,y,z) \ge 0$ su D. (posso passare a coordinate cilindriche e vedere se l'integrale viene finito o infinito).



$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{z}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_{\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z^2}} \frac{\rho^2}{z}\,\rho\, d\rho =$$

$$2\pi \int_0^1 \frac{1}{z}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z^2}} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(4-z^2)^2-(4-z)^2}{z}\,dz =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\cancel{16}-8z^2+z^4-(\cancel{16}-8z+z^2)}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{8z-9z^2+z^4}{z}\,dz =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 (8-9z+z^3)\,dz = \frac{\pi}{2}\left[8z-\frac{9}{2}z^2+\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(8-\frac{9}{2}+\frac{1}{4}\right) =$$

$$\frac{\pi}{8}(32-18+1) = \frac{15\pi}{8}$$