Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 17 febbraio 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40**. Il tempo a disposizione è 2 ore

Inizio Test

1. Si consideri la serie di potenze: $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ ($f(x)$ è definita per le x in cui la serie converge).

1. Si dica qual è il raggio di convergenza R della serie: (1 pt.)

   $R =$ 1 .

2. Si trovi la derivata terza di f in zero: (1 pt.)

   $f'''(0) =$ 18 / non esiste.

3. Se inoltre $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si dica quale tra le seguenti relazioni è vera: (per le x in cui $f(x)$ e $g(x)$ esistono): (1 pt.)

   a $f'(x) = g(x)$, b $g'(x) = f(x)$, c $xf'(x) = g(x)$, ~~d~~ $xg'(x) = f(x)$,
   e nessuna delle precedenti.

4. Si trovi la somma della serie: (3 pt.)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

2. Si consideri $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $G(x, y) := e^{xy-3} - x + 2y - 6$. Indichiamo $\mathcal{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : G(x, y) = 0\}$. È chiaro che $(1, 3) \in \mathcal{M}$.

Indichiamo con $x(y)$ l'eventuale funzione trovata mediante il teorema del Dini, che sia definita vicino a $y = 3$ e tale che, vicino a $(1, 3)$, $\mathcal{M}$ coincida con il grafico di $x = x(y)$. Analogamente indichiamo con $y(x)$ l'eventuale funzione trovata mediante il teorema del Dini, che sia definita vicino a $x = 1$ e tale che, vicino a $(1, 3)$, $\mathcal{M}$ coincida con il grafico di $y = y(x)$. Con queste notazioni si dica quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

1. Si ha: (2 pt.)

   $x'(3) =$ $-3/2$ / il Dini non garantisce l'esistenza di $x(y)$.

2. Si ha: (2 pt.)

   $y'(1) =$ $-2/3$ / il Dini non garantisce l'esistenza di $y(x)$.

(1) La serie si scrive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove $a_n = n$. Allora

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow R = 1/1 = 1$

(2) Si sa che $f^{(k)}(0) = a_k \, k! \Rightarrow f'''(0) = 3!\, a_3 = 6 \cdot 3 = 18$

(3) Se $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \Rightarrow x g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = f(x)$

(4) Se uso la (3) con $x = \frac{1}{2}$ ottengo $\frac{1}{2} g'(1/2) = f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Dato che $g(x)$ è la serie geometrica $\Rightarrow g(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow f(x) = x g'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. DUNQUE $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = \frac{1}{1/2} = 2$

(2)

$G(x,y) = e^{xy-3} - x + 2y - 6$. Si ha

$\frac{\partial G}{\partial x} = y e^{xy-3} - 1 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x}(1,3) = 3 - 1 = 2 \quad (\neq 0)$

$\frac{\partial G}{\partial y} = x e^{xy-3} + 2 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(1,3) = 1 + 2 = 3 \quad (\neq 0)$

DUNQUE POSSO APPLICARE DINI IN TUTTI DUE I VERSI.

(1) $\frac{dx}{dy}(3) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y}(1,3)}{\frac{\partial G}{\partial x}(1,3)} = -\frac{3}{2}$

(2) $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(1,3)}{\frac{\partial G}{\partial y}(1,3)} = -\frac{2}{3}$

3. Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \geq 4, 4-x^2-y^2 \geq z \geq \frac{1}{2}\right\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4, 1 \leq z \leq 2\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 4-x^2-y^2, 1 \leq z \leq 4\}$$

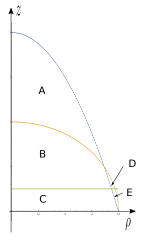
e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := xz\vec{\mathbf{i}} + (x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti e che ∂D è una superficie regolare a tratti. Se $P \in \partial_{reg} D$ (frontiera regolare di D) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a ∂D uscente da D, nel punto P. Notiamo che, per motivi generali, si ha $\partial D = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, dove:

$$S_1 = \left\{x^2+y^2+z^2 = 4, 4-x^2-y^2 \geq z \geq \frac{1}{2}\right\} \quad S_2 = \left\{x^2+y^2+z^2 \geq 4, 4-x^2-y^2 = z \geq \frac{1}{2}\right\}$$
$$S_3 = \left\{x^2+y^2+z^2 \geq 4, 4-x^2-y^2 \geq z = \frac{1}{2}\right\}$$

1. Si indichi la regione, tra quelle indicate in figura, che ruotata attorno all'asse z produce l'insieme D: (1 pt.)



$\boxed{\cancel{A}}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{\text{nessuna di queste}}$

2. Si trovino le eguaglianza corrette tra quelle proposte: (2 pt.)

$S_1 = \boxed{\cancel{S}}$ $\boxed{L}$ $\boxed{\emptyset}$ $\boxed{\text{nessuna di queste}}$ $\quad S_2 = \boxed{S}$ $\boxed{\cancel{L}}$ $\boxed{\emptyset}$ $\boxed{\text{nessuna di queste}}$

$S_3 = \boxed{S}$ $\boxed{L}$ $\boxed{\cancel{\emptyset}}$ $\boxed{\text{nessuna di queste}}$

3. Si calcoli: $\hat{\nu}\left(-1, 0, \sqrt{3}\right) = \boxed{1/2}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-\sqrt{3}/2}\,\vec{\mathbf{k}} / \boxed{\text{non esiste}}$; (1 pt.)

4. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (4 pt.)

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{-\frac{27\pi}{4}}.$$

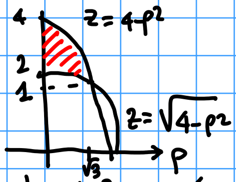
5. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (4 pt.)

$$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \boxed{\frac{27\pi}{2}}.$$

(1) Se $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ vedo che $D=\{\sqrt{4-\rho^2}\le z\le 4-\rho^2,\ z\ge 1/2\}=$

$\{\sqrt{4-\rho^2}\le z\le 4-\rho^2,\ z\ge 1\}$ perché se $\sqrt{4-\rho^2}\le 4-\rho^2=(\sqrt{4-\rho^2})^2\Rightarrow\sqrt{4-\rho^2}\ge 1$

$\Rightarrow z\ge 1$. DUNQUE D è ottenuto ruotando la figura A



(2) È chiaro che

$S_1=\{x^2+y^2+z^2=4,\ 4-x^2-y^2\ge z\ge 1/2\}=\{z^2=4-x^2-y^2,\ \frac12\le z\le 4-x^2-y^2\}$

$=\{z^2=4-x^2-y^2,\ \frac12\le z\le z^2\}=\{z^2=4-x^2-y^2,\ \frac12\le z,\ z(z-1)\ge 0\}=$

$\{\underbrace{z^2=4-x^2-y^2}_{\Rightarrow z^2\le 4},\ 1\le z\}=\{z^2=4-x^2-y^2,\ 1\le z\le 2\}$

$S_2=\{x^2+y^2+z^2\ge 4,\ \frac12\le z=4-x^2-y^2\}=\{z^2\ge z\ge\frac12,\ z=4-x^2-y^2\}$

$=\{z\ge 1,\ z=4-x^2-y^2\}=\{4\ge z\ge 1,\ z=4-x^2-y^2\}$

$S_3=\{x^2+y^2+z^2\ge 4,\ x^2+y^2+z\le 4,\ z=1/2\}=$

$\{4-\frac14\le x^2+y^2\le 4-1/2,\ z=1/2\}=\emptyset$ (perché $4-\frac14>4-\frac12$)

(3) Se $P=(-1,0,\sqrt3)\Rightarrow(-1)^2+0^2+(\sqrt3)^2=1+3=4$ mentre $\sqrt3>1$

dunque $P\in S$ $P\notin L$. S è dato da $G(x,y,z)=4-x^2-y^2-z^2$

e $\nabla G=-\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$. $\nabla G(P)=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\sqrt3\end{pmatrix}$ $|\nabla G(P)|=\sqrt{(-2)^2+0^2+(2\sqrt3)^2}$

$=\sqrt{4+12}=4$

$\Rightarrow\vec\nu(P)=\frac{\nabla G(P)}{\|\nabla G(P)\|}=\frac14\begin{pmatrix}2\\0\\-2\sqrt3\end{pmatrix}=\frac12\vec i-\frac{\sqrt3}{2}\vec k$

(4) Parametrizzo S con le coordinate sferiche

$\Gamma(\theta,\varphi)=2(\cos\theta\sin\varphi\,\vec i+\sin\theta\sin\varphi\,\vec j+\cos\varphi\,\vec k)\Rightarrow$ (NOTO...)

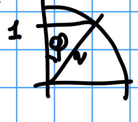
$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}=2(-\sin\theta\sin\varphi\,\vec i+\cos\theta\sin\varphi\,\vec j)$ $\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi}=2(\cos\theta\cos\varphi\,\vec i+\sin\theta\cos\varphi\,\vec j-\sin\varphi\,\vec k)$

$\vec N_\Gamma(\theta,\varphi)=\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\otimes\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi}=4\det\begin{bmatrix}\vec i & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi\\ \vec j & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi\\ \vec k & 0 & -\sin\varphi\end{bmatrix}=$

$4\sin\varphi\left(-\cos\theta\sin\varphi\,\vec i-\sin\theta\sin\varphi\,\vec j-\cos\varphi\,\vec k\right)=-2\sin\varphi\,\Gamma(\theta,\varphi)$

(e $\|\Gamma(\theta,\varphi)\|=2$)

Vedo che $(x,y,z)\in S\iff 0\le\theta\le 2\pi$, $\cos\varphi\ge\frac12$ cioè $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$



INOLTRE $\vec N_\Gamma$ PUNTA VERSO L'ORIGINE DUNQUE

$$\hat{\nu}(\Gamma(\vartheta,\varphi)) = \frac{\vec{N}_\Gamma(\vartheta,\varphi)}{\|\vec{N}_\Gamma(\vartheta,\varphi)\|}$$ per cui Γ mi dà il segno corretto del flusso DUNQUE

$$\phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_{\substack{0\le\vartheta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi/3}} \vec{f}(\Gamma(\vartheta,\varphi))\cdot\vec{N}(\vartheta,\varphi)\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/3}\left[\underbrace{2\cos\vartheta\sin\varphi}_{x}\,\underbrace{2\cos\varphi}_{z}\,\vec{i} + \left(\underbrace{4\cos^2\vartheta\sin^2\varphi}_{x^2} + \underbrace{4\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}_{y^2}\right)\vec{k}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[-\cos\vartheta\sin\varphi\,\vec{i} - \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{j} - \cos\varphi\,\vec{k}\right]4\sin\varphi\, d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi/3}\left(-16\cos^2\vartheta\cos\varphi\sin^3\varphi - 16\cos\varphi\sin^3\varphi\right)d\varphi\right)d\vartheta =$$

$$-16\int_0^{2\pi}(\cos^2\vartheta+1)\,d\vartheta\int_0^{\pi/3}\sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \quad \nwarrow\ s=\sin\varphi \quad ds=\cos\varphi\, d\varphi$$

$$-16\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}+1\right)d\vartheta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} s^3\, ds =$$

$$-16\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi\right)\left[\frac{s^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -16\cdot 3\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16} = -\frac{27\pi}{4}$$

(5) Calcoliamo $\phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu})$ usando la divergenza. Si ha

$\operatorname{div}\vec{f} = z$. DUNQUE

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \quad \text{(coordinate cilindriche)}$$

$$\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_{\sqrt{4-\rho^2}}^{4-\rho^2} z\rho\, dz\right)d\rho = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\left[\frac{z^2}{2}\right]_{\sqrt{4-\rho^2}}^{4-\rho^2}d\rho =$$

$$\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left((4-\rho^2)^2-(4-\rho^2)\right)\rho\, d\rho \overset{(t=\rho^2)}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^3\left((4-t)^2-(4-t)\right)dt =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^3(16-8t+t^2-4+t)\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^3(12-7t+t^2)\,dt =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[12t-\frac{7t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = \frac{\pi}{2}\left(36-\frac{7\cdot 9}{2}+\frac{27}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{90-63}{2}\right) = \frac{27\pi}{4}$$

DUNQUE $\frac{27}{4}\pi = \phi(\vec{f},\partial D,\hat{\nu}) = \phi(\vec{f},S,\hat{\nu}) + \phi(\vec{f},L,\hat{\nu}) =$

$$-\frac{27}{4}\pi + \phi(\vec{f},L,\hat{\nu}) \iff \phi(\vec{f},L,\hat{\nu}) = \frac{27\pi}{2}$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x, y) = xy + z$ e sia

$$D := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \geq 4, 4 - x^2 - y^2 \geq z \geq \frac{1}{2} \right\}$$

(lo stesso insieme dell'esercizio precedente).

1. Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di sei): (7 pt.)

$(x, y, z) = \boxed{\left(0, 0, 4\right)}$ $f = 4$

$(x, y, z) = \boxed{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)}$ $f = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$(x, y, z) = \boxed{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)}$ $f = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$

$(x, y, z) = \boxed{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)}$ $f = -1/2$

$(x, y, z) = \boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)}$ $f = 5/2$

$(x, y, z) = \boxed{\left(0, 0, 2\right)}$ $f = 2$

2. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{P \in D} f(P) = \boxed{-1/2}$$

3. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\max_{P \in D} f(P) = \boxed{4}$$

$$f = xy + z \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

1 PTI CRITICI LIBERI : $y = 0 \quad x = 0 \quad 1 = 0$ IMPOSSIBILE

(2A) PTI CRITICI SU $S \setminus L$

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x = \lambda y \\ 1 = \lambda z \qquad (\lambda \neq 0) \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \quad \frac{1}{2} < z < 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\lambda x^2 = xy = \lambda y^2 \Rightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm \lambda x \\ y = \pm x \end{matrix} \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

$\lambda = 1, \quad y = x$ PRB III

Se $x = 0 \Rightarrow$ TROVO $\boxed{(0,0,2)}$, Se $\lambda = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \quad z = 1 \\ 2x^2 + 1 = 4 \end{cases} \qquad x = y = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad z = 1 \qquad \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \sqrt{\frac{3}{2}} \quad 1 \right)$$

NON verifica $z < 4 - x^2 - y^2$

(2B) PTI CRITICI SU $L \setminus S$

$$\begin{cases} y = -2\lambda x \\ x = -2\lambda y \\ 1 = -\lambda \\ x^2+y^2+z^2 > 4 \quad z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\lambda = -1 \quad y = 2x \quad x = 2y \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 4$$

$$\boxed{(0,0,4)}$$

(3) PTI CRITICI SU $S \cap L$

$$\begin{cases} y = (2\lambda - 2\mu)x \\ x = (2\lambda - 2\mu)y \\ 1 = 2\lambda z - \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 4 = z + x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4(\lambda-\mu)^2 y \\ 1 = 2\lambda - \mu \\ z = 1, \quad x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

$y = 0 \;(\Rightarrow x = 0$ IMPOSSIBILE$)$

$2(\lambda - \mu) = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$

$\Rightarrow$ TROVO $\boxed{\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \quad 1 \right)}$ (4 PUNTI)

calcolando f su questi punti trovo max/min di f su D

5. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -4x + 4y + (10t+1)e^{2t} \\ y' = -9x + 8y + (15t-1)e^{2t} \end{cases} \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} 1+10t \\ -1+15t \end{bmatrix} e^{2t}.$$

1. Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$\lambda_1 =$ 2 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 2 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ $\quad m_A(\lambda_2) =$ $\quad m_G(\lambda_2) =$;

(non occorre riempire entrambe le caselle se c'è un solo autovalore).

2. Si cerchi una soluzione di (Sys) del tipo $x(t) = ate^{2t}$, $y(t) = bte^{2t}$ con a, b costanti. Se non si trova una tale soluzione si scriva "non esiste": (4 pt.)

$x(t) =$ $t\, e^{2t}$

$y(t) =$ $-t\, e^{2t}$

3. Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 2$: (4 pt.)

$x(t) =$ $(3t+1)\, e^{2t}$

$y(t) =$ $(2t+2)\, e^{2t}$

Fine Test

(1) Polinomio caratteristico: $p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-4-\lambda & 4\\ -9 & 8-\lambda\end{bmatrix} = (4+\lambda)(\lambda-8)+36 =$

$\lambda^2-4\lambda-32+36=(\lambda-2)^2 \Rightarrow \lambda=2 \qquad m_A(2)=2$

$B:=A-2I=\begin{bmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{bmatrix} \neq 0$ dunque $m_G(2)=1$

(2) Suppongo $x(t)=a\,t\,e^{2t} \qquad x'(t)=(a+2at)\,e^{2t}$

$y'(t)= \quad b\,e^{2t} \Rightarrow y'(t)=(b+2b\,t)\,e^{2t}$

PROVO A IMPORRE CHE VALGA L'EQUAZIONE

$$\begin{cases} a(1+2t)e^{2t} = -4ate^{2t}+4bte^{2t}+(1+10t)e^{2t} \\ b(1+2t)e^{2t} = -9ate^{2t}+8bte^{2t}+(-1+15t)e^{2t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+2at+4at-4bt = 1+10t \\ b+2bt+9at-8bt = -1+15t \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a=1, & 6a-4b=10 \\ b=-1, & 9a-6b=15 \end{matrix}$$

IL SISTEMA HA 4 equazioni e solo due incognite. Però $a=1$ $b=-1$ risolve anche le equazioni a destra. DUNQUE TROVO

$$x(t)=t\,e^{2t} \qquad y(t)=-t\,e^{2t}$$

(3) Cerco $Y(t)$ del tipo $Y(t)=Y_0(t)+\bar{Y}(t)$ con $\bar{Y}(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}te^{t}$ (quello del punto 2) e Y_0 sol dell'omogenea $Y_0'=AY_0$.

Noto che $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=Y(0)=Y_0(0)+\bar{Y}(0)$. Dato che $\bar{Y}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

deve essere $Y_0(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ Dunque $Y_0(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Cerco la forma di Jordan di A. Pongo $B=A-2I$

$B=\begin{bmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{bmatrix}$ Dato che $B\neq 0$ cerco e_2 con $Be_2 \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Mi conviene scegliere $e_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow e_1:=Be_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Pongo allora $M=\left[e_1 \mid e_2\right]=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \qquad J=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow Y_0(t)=M\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}M^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = e^{2t}M\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=$

$$e^{2t}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}2t+1\\ 3t+2\end{pmatrix}$$

Se sommo $\bar{Y}(t)$ trovo $\quad Y(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}2t+1+t\\ -3t+2-t\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}3t+1\\ -4t+2\end{pmatrix}$

$$K_m = \sum \delta_i \, 10^i$$

$$10^r \leq m < 10^{r+1}$$