Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 3 febbraio 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40**. Il tempo a disposizione è 2 ore

Inizio Test

1. Si consideri la seguente serie di potenze: $y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ ($y(x)$ è definita per le x in cui la serie converge).

1. Si dica qual è il raggio di convergenza R della serie: (1 pt.)

$R = \boxed{+\infty}$.

2. Si trovi la derivata decima di y in zero: (1 pt.)

$y^{(10)}(0) = \boxed{0}$ / non esiste.

3. Si dica quale tra le seguenti relazioni è vera per $y(x)$ (per le x in cui $y(x)$ esiste): (3 pt.)

- a $xy'(x) = y(x)$,
- b $xy'(x) = (1 + 2x)y(x)$,
- ~~c~~ $xy'(x) = (1 + 2x^2)y(x)$,
- d $xy'(x) = (1 + 2x^3)y(x)$,
- e nessuna delle precedenti.

2. Si consideri $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $G(x, y) := 2e^{xy-1} + x^2 - y^2 - 2$. Indichiamo $\mathcal{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : G(x, y) = 0\}$. È chiaro che $(1, 1) \in \mathcal{M}$.

Indichiamo con $x(y)$ l'eventuale funzione trovata mediante il teorema del Dini, che sia definita vicino a $y = 1$ e tale che, vicino a $(1, 1)$, $\mathcal{M}$ coincida con il grafico di $x = x(y)$. Analogamente indichiamo con $y(x)$ l'eventuale funzione trovata mediante il teorema del Dini, che sia definita vicino a $x = 1$ e tale che, vicino a $(1, 1)$, $\mathcal{M}$ coincida con il grafico di $y = y(x)$. Con queste notazioni si dica quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

1. Si ha: (2 pt.)

$x'(1) = \boxed{0}$ / il Dini non garantisce l'esistenza di $x(y)$.

2. Si ha: (2 pt.)

$y'(1) = \boxed{}$ / ~~il Dini non garantisce l'esistenza di $y(x)$~~.

(1) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ (1) IL MODO PIÙ semplice di vedere y è

$y(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x\, g(x^2)$ dove $g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. È chiaro

che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \Big/ \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow R\left(=\frac{1}{0}\right) = +\infty$. (NOTA CHE $g(y) = e^y \Rightarrow y(x) = x e^{x^2}$).

(2) È chiaro che $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ k! & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$

dunque $a_n = 0$ se n è pari. Ne segue che $y^{(10)}(0) = 10!\, a_{10} = 0$ $(a_{10} = 0)$

(3) Derivando per serie $\Rightarrow$ $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ $\Rightarrow$

$x\,y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{n!} + \frac{1}{n!}\right) x^{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n-1)!} + y(x)$

$= 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!} + y(x) = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} + y(x) = 2x^2 y(x) + y(x)$

<u>N.B.</u> Se uso l'espressione $y(x) = x e^{x^2}$ il conto è ovvio.

(2) $G(x,y) = 2e^{xy-1} + x^2 - y^2 - 2$ $\quad (G(1,1) = 2e^0 + 1 - 1 - 2 = 0 !)$

$\frac{\partial G}{\partial x} = 2y e^{xy-1} + 2x$ $\quad \frac{\partial G}{\partial x}(1,1) = 2 + 2 = 4 \neq 0$

$\frac{\partial G}{\partial y} = 2x e^{xy-1} - 2y$ $\quad \frac{\partial G}{\partial y}(1,1) = 2 - 2 = 0$

NE SEGUE CHE POSSO applicare DINI <u>NEL PRIMO CASO</u> e non posso applicarlo nel secondo caso.

Nel primo caso M è localmente il grafico di una $x(y)$ definita per $y \simeq 1$. Sappiamo che

$$x'(1) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial y}(1,1)}{\frac{\partial G}{\partial x}(1,1)} = -\frac{0}{4} = 0$$

3. Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4, 4-x^2-y^2 \leq z\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 4-x^2-y^2, 0 \leq z \leq 1\}$$
$$W_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 4 = x^2+y^2, z=0\}, W_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3 = x^2+y^2, z=1\},$$

il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := z(x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}$$

e le curve $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definite da:

$$\gamma_0(t) := 2\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + 2\sin(t)\vec{\mathbf{j}} \quad , \quad \gamma_1(t) := \sqrt{3}\cos(t)\vec{\mathbf{i}} - \sqrt{3}\sin(t)\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti e che $\partial D = S \cup L$ è una superficie regolare a tratti. Se $P \in \partial_{reg} D$ (frontiera regolare di D) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a ∂D uscente da D, nel punto P.

1. Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: (1 pt.)
   $\Sigma(S) = \Sigma(L) = W_0 \cup W_1$ ~~VERO~~ FALSO
2. Si dica quale affermazione è vera riguardo alle le curve γ_0 e γ_1: (2 pt.)
   - a percorrono $\Sigma(L)$ con verso coerente rispetto alla normale $\hat{\nu}$;
   - ~~b~~ percorrono $\Sigma(L)$ con verso coerente con la normale $-\hat{\nu}$;
   - c percorrono $\Sigma(L)$, ma il verso di γ_0 è coerente con $\hat{\nu}$ mentre quello di γ_1 è coerente con $-\hat{\nu}$;
   - d percorrono $\Sigma(L)$, ma il verso di γ_0 è coerente con $-\hat{\nu}$ mentre quello di γ_1 è coerente con $\hat{\nu}$;
   - d nessuna delle precedenti.
3. Si calcoli: $\hat{\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}}\vec{\mathbf{i}} + \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-\frac{1}{\sqrt{15}}}\vec{\mathbf{k}}$ / non esiste; (1 pt.)
4. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (4 pt.)
   $$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{\frac{34}{15}\pi}.$$
5. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (4 pt.)
   $$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \boxed{-\frac{5}{3}\pi}.$$
6. Si calcoli il flusso di $\text{rot}\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (2 pt.)
   $$\Phi(\text{rot}\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \boxed{0}.$$

(3) $D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 4 \ , \ z \ge 4-x^2-y^2 \}$

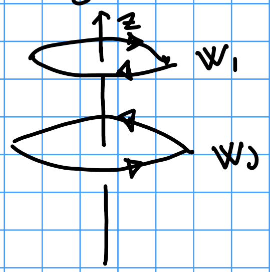
Notiamo che (NON RICHIESTO), se $(x,y,z)\in D$ $x^2+y^2 \le 4 \Rightarrow z \ge 0$. Ne segue

$$\partial D = \{ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \ge 4-x^2-y^2 \} \cup \{ x^2+y^2+z^2 \le 4\ \ z = 4-x^2-y^2 \} =$$
$$\{ x^2+y^2+z^2 = 4,\ 0 \le z \le z^2 \} \cup \{ z = 4-x^2-y^2,\ 0 \le z \le z^2 \} =$$
$$\{ x^2+y^2+z^2 = 4,\ 0 \le z \le 1 \} \cup \{ z = 4-x^2-y^2,\ 0 \le z \le 1 \} = S \cup L$$

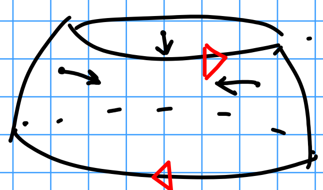
(1) Come visto a lezione

$$\Sigma(S) = \{ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z=0 / z=1 \} = W_0 \cup W_1$$
$$\Sigma(L) = \{ z = 4-x^2-y^2,\ z=0 / z=1 \} = W_0 \cup W_1$$

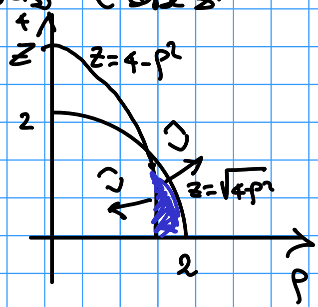
(2) È chiaro che γ_0 percorre W_0 e γ_1 percorre γ_1 nei versi indicati



LA SUPERFICIE L ha come bordo $W_0 \cup W_1$ (vedi sopra) e normale che punta verso l'asse z



S ed L si ottengono ruotando le due curve → attorno all'asse z



DUNQUE IL VERSO COERENTE con $\hat\nu$ è quello sopra che è opposto alle due curve

(3) IL PUNTO $P = \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\sqrt3, \frac12\right)$ è su L dato che $4 - \left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 - (-\sqrt3)^2 = 4-3-\frac12 = \frac12 = z$

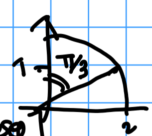
Dunque la normale $\hat\nu(P) = \left.\frac{\nabla(4-x^2-y^2-z)}{|\nabla(4-x^2-y^2-z)|}\right|_P = \frac{1}{\|\cdot\|}\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\-1\end{pmatrix}_P = -\begin{pmatrix}\sqrt2\\-2\sqrt3\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2+12+1}} =$

$$-\frac{1}{\sqrt{15}}\left(\sqrt2\,\vec i - 2\sqrt3\,\vec j + \vec k\right)$$

(4) Calcolo $\Phi(\vec F, S, \hat\nu)$ usando le coordinate sferiche $x = 2\cos\theta\sin\varphi$ $y = 2\sin\theta\sin\varphi$

$$\Gamma(\theta,\varphi) = 2\cos\theta\sin\varphi\,\vec i + 2\sin\theta\sin\varphi + 2\cos\varphi\,\vec k.$$

Si vede che $0 \le \theta \le 2\pi$ mentre $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \pi/2$



e $\vec N(\theta,\varphi) = \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} \otimes \frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} = \det\begin{bmatrix}\vec i & -2\sin\theta\sin\varphi & 2\cos\theta\cos\varphi \\ \vec j & 2\cos\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi \\ \vec k & 0 & -2\sin\varphi\end{bmatrix} =$

$$4\sin\varphi\,\det\begin{bmatrix}\vec i & -\sin\theta & \cos\theta\cos\varphi \\ \vec j & \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi \\ \vec k & 0 & -\sin\varphi\end{bmatrix} = -4\sin\varphi\left(\cos\theta\cos\varphi\,\vec i + \sin\theta\sin\varphi\,\vec j + \cos(\varphi)\,\vec k\right)$$

NOTO CHE $\vec N$ è discorde con $\hat\nu$ assegnato dunque se uso Γ trovo l'opposto del flusso

DUNQUE $-\Phi(\vec{g}, S, \hat{\nu}) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/3}^{\pi/2} \underbrace{2\cos\varphi}_{z} \underbrace{(4\sin^2\varphi)}_{x^2+y^2} \cdot \underbrace{(-4)\sin\varphi\cos\varphi}_{\vec{k}\cdot\vec{N}}\, d\varphi =$

$$2\pi(-32)\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\varphi \sin^3\varphi \, d\varphi = -64\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\varphi (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi \, d\varphi \qquad (\cos\varphi = s)$$

$-\sin\varphi \, d\varphi = ds$

$$64\pi \int_{1/2}^{0} s^2(1-s^2)\, ds = 64\pi \int_0^{1/2} (s^4 - s^2)\, ds = 64\pi \left[\frac{s^5}{5} - \frac{s^3}{3}\right]_0^{1/2} =$$

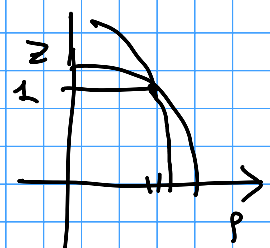
$$64\pi\left(\frac{1}{2^5}\frac{1}{5} - \frac{1}{2^3}\frac{1}{3}\right) = 8\pi\left(\frac{1}{4}\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = 8\pi\left(\frac{3-20}{60}\right) = -\frac{34}{15}\pi$$

(5) Calcolo $\Phi(\vec{g}, \partial D, \hat{\nu})$ mediante la divergenza. Noto che

$\operatorname{div} \vec{g} = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{g} \, dx\,dy\,dz = \iiint_D (x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz = \text{(coord. cilindriche)}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\left\{\substack{\rho^2+z^2 \le 4 \\ \rho^2+z \ge 4}\right\}} \rho^2 \rho \, d\rho \, dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z^2}} \rho^3 \, d\rho\right) dz =$$



$$2\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z^2}} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left((4-z^2)^2 - (4-z)^2\right) dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left((16-8z^2+z^4) - (16-8z+z^2)\right) dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 (z^4 - 9z^2 + 8z)\, dz = \frac{\pi}{2}\left[\frac{z^5}{5} - 3z^3 + 4z^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{5} - 3 + 4\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3\pi}{5}$$

Per differenza

$$\Phi(\vec{g}, L, \hat{\nu}) = \Phi(\vec{g}, \partial D, \hat{\nu}) - \Phi(\vec{g}, S, \hat{\nu}) = \frac{3}{5}\pi - \frac{34}{15}\pi = -\frac{25}{15}\pi$$

$$= -\frac{5}{3}\pi$$

(6) Usando Stokes $\Phi(\operatorname{rot}\vec{g}, L, \hat{\nu}) = \int_{\Sigma(L)_{\hat{\nu}}} \vec{g} \cdot d\vec{s}$

Ma $\Sigma(L) = W_0 \cup W_1$. Su W_0 $z=0 \Rightarrow \vec{g} = 0$.

Su W_1 $\vec{g}$ è nella direzione $\vec{k}$ mentre la tangente a W_1 è nel piano x,y (W_1 è nel piano $\{z=1\}$, parallelo al piano x,y)

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma(L)_{\hat{\nu}}} \vec{g} \cdot d\vec{s} = 0$$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y) = 2x-2y+z$ e sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2+z \geq 4\}$. (lo stesso insieme dell'esercizio precedente).

1. Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di sei): (7 pt.)

$(x,y,z) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$(x,y,z) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right)$

$(x,y,z) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$

$(x,y,z) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$

$(x,y,z) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$

$(x,y,z) =$

$\frac{8}{3}+\frac{8}{3}+\frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$

$4\sqrt{2} < 6$

$-4\sqrt{2}$

$4\sqrt{\frac{3}{2}}+1 < 6$

$-4\sqrt{\frac{3}{2}}+1 > -4\sqrt{2}$

2. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\min_{P \in D} f(P) = -4\sqrt{2}$

3. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$\max_{P \in D} f(P) = 6$

$f(x,y,z) = 2x - 2y + z \Rightarrow \nabla f = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vedo che $\nabla \vec{f} = \vec{0}$ non ha soluzione (NO PTI CRITICI LIBERI)

Uso i moltiplicatori $\Rightarrow$ VARI CASI con le funzioni

$G_1 = x^2+y^2+z^2-4 \qquad G_2 = 4 - x^2 - y^2 - z$

(A) $\begin{cases} \nabla \vec{f} = \lambda \nabla G_1 \\ G_1 = 0 \quad G_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 4 < z + x^2 + y^2 \end{cases}$ VEDO CHE $\lambda \neq 0$ e che deve essere $\underbrace{\frac{1}{\lambda} = x = -y = 2z}$

DUNQUE HO $(2z)^2 + (-2z)^2 + z^2 = 4 \Leftrightarrow 9z^2 = 4 \Leftrightarrow z = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow$ TROVO $\pm\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Vedo che il $-$ non verifica $G_2 < 0$ mentre $+$ va bene! $\boxed{\left(\frac{4}{3}\ -\frac{4}{3}\ \frac{2}{3}\right)}$

(B) $\begin{cases} \nabla \vec{f} = \lambda \nabla G_2 \\ G_2 = 0 \quad G_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = -2\lambda x \\ -2 = -2\lambda y \\ 1 = -\lambda \\ z + x^2 + y^2 = 4 > x^2+y^2+z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = -1 \\ x = 1 \quad y = -1 \\ z = 4 - 2 = 2 \end{matrix}$ TROVO $(1, -1, 2)$

MA $1^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 6 > 0$ NON verifica $G_1 < 0$

(C) $\begin{cases} \nabla \vec{f} = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2 \\ G_1 = G_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda x - 2\mu x = 2(\lambda - \mu) x \\ -2 = 2\lambda y - 2\mu y = 2(\lambda - \mu) y \\ 1 = 2\lambda z - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 = x^2 + y^2 + z \end{cases}$

vedo dalle prime due che $\lambda - \mu \neq 0 \Rightarrow \underline{x = -y}$. Dall'ultima ho

$z^2 = z \Leftrightarrow z = 0 / z = 1$. Se $z = 0$ TROVO $x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{\pm(\sqrt{2} - \sqrt{2}, 0)}$

Se $z = 1$ TROVO $\boxed{\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \mp \sqrt{\frac{3}{2}} \quad 1\right)}$

Vediamo quanto fa f nei vari punti

- $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$
- $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) = 4\sqrt{2}$
- $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = -4\sqrt{2}$
- $f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) = 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 1$
- $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) = -4\sqrt{\frac{3}{2}} + 1$

Vediamo che $\boxed{6 > 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 1} \Leftrightarrow 36 > \overbrace{16 \cdot \frac{3}{2}}^{24} + 8\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \Leftrightarrow$

$$11 > 8\sqrt{\frac{3}{2}} \iff 121 > 64\cdot\frac{3}{2} = 32\cdot 3 = 96\Big)$$

$$\boxed{4\sqrt{\frac{3}{2}}+1 > 4\sqrt{2}} \Big(\iff 16\cdot\frac{3}{2}+1+8\sqrt{\frac{3}{2}} > 32 \iff$$

$$8\sqrt{\frac{3}{2}} > 7 \iff 64\cdot\frac{3}{2} > 49 \iff 96 > 49\Big)$$

$$\boxed{4\sqrt{2} > 4\sqrt{\frac{3}{2}}-1} \Big(\iff 32 > 16\cdot\frac{3}{2}+1-8\sqrt{\frac{3}{2}} \iff 7 > -8\sqrt{\frac{3}{2}}\Big)$$

Ne segue che il valore più alto è $f\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)=6$

e quello più piccolo è $f(-\sqrt{2},\sqrt{2},0) = -4\sqrt{2}$

5. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -3x - y + 4z + 2 \\ y' = -5x - 3y + 9z + 1 \\ z' = -2x - y + 3z + 1 \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (2 pt.)

$\lambda_1 =$ -1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 3 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ $\quad m_A(\lambda_2) =$ $\quad m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

2. Si trovi una soluzione **costante** di (Sys), oppure si scriva "non esiste": (2 pt.)

$x(t) =$ 2

$y(t) =$ 0

$z(t) =$ 1

3. Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = 3$, $y(0) = -1$, $z(0) = 1$: (4 pt.)

$x(t) =$ $e^{-t}\left(t^2/2 - t + 1\right) + 2$

$y(t) =$ $e^{-t}\left(t^2 - 3t - 1\right)$

$z(t) =$ $e^{-t}\left(t^2/2 - t\right) + 1$

Fine Test

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & -1 & 4 \\ -5 & -3-\lambda & 9 \\ -2 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3+\lambda)(3+\lambda)(3-\lambda) + 18 + 20 - \{ 9(3+\lambda) + 8(3+\lambda) + 5(3-\lambda) \} =$

$(9 + 6\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) + 38 - \{ 27 + 9\lambda + 24 + 8\lambda + 15 - 5\lambda \} =$

$\cancel{27} + 18\lambda + 3\lambda^2 - 9\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 + 38 - \cancel{27} - 24 - 15 - 9\lambda - 8\lambda + 5\lambda =$

$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3 \Rightarrow$ UN SOLO AUTOVALORE $\boxed{\lambda = -1}$

(2) Se $Y(t) = \bar{Y}$ è sol. costante $\Rightarrow Y' = 0 = A\bar{Y} + B \iff A\bar{Y} = -B$ cioè

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 4 \\ -5 & -3 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -3x_0 - y_0 + 4z_0 = -2 \\ -5x_0 - 3y_0 + 9y_0 = -1 \\ -2x_0 - y_0 + 3z_0 = -1 \end{cases}$$

$5\,\mathrm{I}^\circ - 3\,\mathrm{II}^\circ \rightarrow -\cancel{15}x_0 - 5y_0 + 20z_0 - (-\cancel{15}x_0 - 9y_0 + 27y_0) = -10 - (-3)$

$4y_0 - 7z_0 = -7$

$2\,\mathrm{I}^\circ - 3\,\mathrm{III}^\circ \rightarrow -\cancel{6}x_0 - 2y_0 + 8z_0 - \{-\cancel{6}x_0 - 3y_0 + 9z_0\} = -4 - (-3)$

$y_0 - z_0 = -1$

$$\rightarrow \begin{cases} -3x_0 - y_0 + 4z_0 = -2 \\ 4y_0 - 7z_0 = -7 \\ y_0 - z_0 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x_0 - y_0 + 4z_0 = -2 \\ 4y_0 - 7z_0 = -7 \\ -3z_0 = -3 \end{cases}$$

(3) Cerco $Y(t) = Y_0(t) = \bar{Y}$ dove $\bar{Y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Y_0' = AY_0$

(sol. dell'omogenea). Se metto $t=0$ trovo $Y(0) = Y_0(0) + \bar{Y} \iff$

$$Y_0(0) = Y(0) - \bar{Y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DUNQUE $Y_0(t) = e^{tA} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Devo trovare la forma di Jordan di A.

PONGO $B = A + I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ HA RANGO 2. Calcolo B^2

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\neq 0 \Rightarrow m_G(-1) = 1)$$

Cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$ NOTO che posso prendere $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(il dato iniziale per $Y(0)$ – MI FA COMODO!!). Prendo

$$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e_1 = B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_2 = B e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

DUNQUE SE $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

si ha $A = M J M^{-1}$ e

$$Y_0(t) = e^{tA} Y(0) = M e^{tJ} \underbrace{M^{-1} Y(0)}_{\hat{e}_3} = e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ t^2 - 3t - 1 \\ \frac{t^2}{2} - t \end{bmatrix}$$