Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 13 gennaio 2023

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40**. Il tempo a disposizione è 2 ore

Inizio Test

1. Consideriamo la seguente equazione differenziale lineare:

$1 + 2x + 3x^2 + 7x^3$

$b_0 = 1 \quad b_1 = 2 \quad b_2 = 3 \quad b_3 = 7$

$b_n = 0 \ \forall n \geq 4$

$$x(x-1)y'' + 3y' - 6y = 3x^2 \tag{E}$$

Cerchiamo soluzioni sviluppabili in serie di potenze vicino a zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Si trovi una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n: (2 pt.)

$a_1 = 2a_0 \quad a_2 = 3a_0 \quad a_3 = 1 + 4a_0 \qquad a_0, a_4$ liberi

$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} a_n$ se $n \geq 4$

OPPURE

$(3-n)\left((n+1)a_{n+1} - (n+2)a_n\right) = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ 3 & n = 2 \end{cases}$

$3x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \iff$

$b_n = 0$ se $n \neq 2$ $\quad b_2 = 3$

2. Se aggiungiamo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 1,\ y'(0) = 0}$, allora: (1 pt.)

[a] esiste una e una sola soluzione di (E) con tali condizioni;

[b] esiste una soluzione di (E) con tali condizioni, ma non è unica;

[X] non esiste nessuna soluzione di (E) con tali condizioni.

3. Si consideri una soluzione $\tilde{y}$ verificante $\boxed{\tilde{y}(0) = 0,\ \tilde{y}^{(4)}(0) = 1}$. Si trovi il raggio di convergenza R della serie che definisce $\tilde{y}$, oppure si barri una delle altre caselle.

$R =$ 1 / [$\tilde{y}$ non esiste] / [R non è univocamente determinato] (2 pt.)

4. Si consideri una soluzione $\tilde{y}$ verificante $\boxed{\tilde{y}(0) = 2}$. Si trovi $\tilde{y}''(0)$ (o si barri una delle caselle):

$\tilde{y}''(0) =$ 12 / [$\tilde{y}$ non esiste] / [$\tilde{y}''(0)$ non è univocamente determinato] (2 pt.)

5. Si trovi la soluzione $\tilde{y}$ di (E) verificante $\boxed{\tilde{y}(0) = 1,\ \tilde{y}^{(5)}(0) = 0}$ (ammesso che esista e sia unica– altrimenti si barrino le caselle corrispondenti). (3 pt.)

$\tilde{y}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3$

/ [$\tilde{y}$ non esiste] / [$\tilde{y}$ non è unica]

$y = \sum_0^\infty a_n x^n \qquad y' = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) x^n$

$y'' = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) n x^{n-1} \left(= \sum_0^\infty a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n\right)$

Dunque

$$x(x-1)y'' + 3y' - 6y = x^2 \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} - x \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) n x^{n-1} + 3\sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) x^n - 6 \sum_0^\infty a_n x^n =$$

$$\sum_0^\infty \left\{ (n+1)(3-n) a_{n+1} + (n^2 - n - 6) a_n \right\} x^n =$$

$$\sum_0^\infty \underbrace{(3-n)\left\{(n+1) a_{n+1} - (n+2) a_n\right\}}_{=b_n} x^n \qquad \text{DUNQUE}$$

$$(R) \quad (3-n)\left((n+1) a_{n+1} - (n+2) a_n\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ 3 & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

Se $n = 3$ Trovo $0 = 0$ (NO INFO: a_4 è libero)

Se $n = 0$ $a_1 = 2a_0$ (a_0 è libero)

Se $n = 1$ $2a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 2a_0 \iff a_2 = 3a_0$

Se $n = 2$ $3a_3 - 4a_2 = 3 \iff 3a_3 = 3 + 4 \cdot 3 a_0 \iff a_3 = 1 + 4a_0$

[Da $n = 4$ in poi ho $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n$] e $a_4 = 4!\, f^{(4)}(0) = 24$

(2) Se impongo $y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 2$ MA ALLORA $y'(0) = 2$

e non può essere $y'(0) = 0$

$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ se } a_n \neq 0 \text{ se } \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

(3) La soluzione esiste (si veda (R)) e se $n \geq 5$ verifica $a_n > 0$ e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \to 1. \quad \text{Dunque } \sqrt[n]{|a_n|} \to 1 \Rightarrow \boxed{R = 1/1 = 1}$$

(4) Da (R) segue $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$ (a_4 è libero quindi ci sono infinite soluzioni) In ogni caso $a_2 = \frac{\tilde{y}''(0)}{2} \iff \tilde{y}''(0) = 2a_2 = 12$

(5) Si vede facilmente che $\tilde{y}(0) = 1 \iff a_0 = 1$, $\tilde{y}^{(5)}(0) = 0 \iff a_5 = 0$

$\iff a_4 = 0 \quad \left(a_5 = \frac{6}{5} a_4\right) \iff a_n = 0 \quad \forall n \geq 5$

2. Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \ge 2+z^2\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2 = 4, |z| \le 1\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2+z^2 = x^2+y^2, |z| \le 1\}$$
$$W := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 3 = x^2+y^2, z^2 = 1\},$$

il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2)(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$$

e la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{i}} - \sin(t)\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}.$$

Diamo per buono che D è un dominio regolare a tratti e se $P \in \partial_{reg} D$ (frontiera regolare di D) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a ∂D uscente da D, nel punto P.

1. Si calcoli: $\hat{\nu}(1, \sqrt{2}, -1) =$ $\boxed{}$ $\vec{\mathbf{i}}+$ $\boxed{}$ $\vec{\mathbf{j}}+$ $\boxed{}$ $\vec{\mathbf{k}}$/ ~~non esiste~~; (1 pt.)
2. Si calcoli: $\hat{\nu}(3/2, 0, -1/2) =$ $\boxed{-\frac{3}{\sqrt{10}}}$ $\vec{\mathbf{i}}+$ $\boxed{0}$ $\vec{\mathbf{j}}+$ $\boxed{\frac{-1}{\sqrt{10}}}$ $\vec{\mathbf{k}}$/ non esiste; (1 pt.)
3. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo: ~~vero~~ falso. (1 pt.)
4. Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale: vero ~~falso~~. (1 pt.)
5. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (4 pt.)

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{64\pi}.$$

6. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (4 pt.)

$$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \boxed{\left(\frac{128}{3} - 64\right)\pi = -\frac{64}{3}\pi}.$$

(1) $P = (1, \sqrt{2}, -1)$ $\quad P \in S \cap L$ dunque $P \notin \partial_{reg} D$

$(\partial D = S \cup L, \ \partial_{reg} D = \partial D \setminus S \cap S \ !!!)$

2 $P = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P \in L \quad \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right)$

$\qquad \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$

L è dato dalla funzione definente $G(x,y,z) = 2 + z^2 - x^2 - y^2$ (che è ≤ 0 su D) Dunque $\nabla G = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$$\nu(P) = \frac{\nabla G(P)}{|\nabla G(P)|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\vec{f}$ è radiale $\Rightarrow$ è conservativo

(4) $$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)x + \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)y + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)z =$$

$$2x^2 + (x^2+y^2+z^2) + 2y^2 + (x^2+y^2+z^2) + 2z^2 + (x^2+y^2+z^2) = 5(x^2+y^2+z^2) \neq 0$$

dunque non è solenoidale

(5) Si può usare la definizione: Noto che su S $\hat{\nu}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

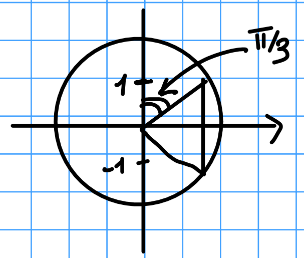
$$\phi(\vec{f}, S, \vec{\nu}) = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iint (x^2+y^2+z^2) \frac{(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d\sigma$$

$$= \iint_S \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 d\sigma = 8 \iint_S d\sigma \qquad (\text{se } P \in S \ \|P\| = 2)$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi - \pi/3} 2 \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot 2 \left[-\cos\varphi\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = 64\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 64\pi$$



$x = 2\cos\theta \sin\varphi$

$y = 2\sin\theta \sin\varphi$

$z = 2\cos\varphi$

$|z| \leq 1 \Leftrightarrow$

$|\cos\varphi| \leq 1/2$

(6) Calcoliamo $\displaystyle\iiint_D \operatorname{div} \vec{f} \, dx\,dy\,dz = 5 \iiint_D (x^2+y^2+z^2) \, dx\,dy\,dz =$

coordinate cilindriche $\quad x = \rho\cos\theta \quad y = \rho \sin\theta \quad z = z$

$$5 \int_0^{2\pi} d\theta \iint_C (\rho^2 + z^2)\rho \, d\rho \, dz \quad \text{dove } C = \{\rho^2 + z^2 \leq 4, \ \rho^2 \geq 2 + z^2\} = \{|z| \leq 1, \sqrt{2+z^2} \leq \rho \leq \sqrt{4-z^2}\}$$

$$= 10\pi \int_{-1}^{1} dz \int_{\sqrt{2+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} (\rho^3 + z^2\rho) \, d\rho = 20\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{z^2\rho^2}{2}\right]_{\sqrt{2+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} dz =$$

$$5\pi \int_0^1 \Big[\underbrace{(4-z^2)^2 - (2+z^2)^2}_{6(2-2z^2)} + 2z^2 \big(\underbrace{(4-z^2) - (2+z^2)}_{2-2z^2}\big)\Big] dz = 5\pi \int_0^1 (12 - 12z^2 + 4z^2 - 4z^4) dz$$

$$= 5\pi \int_0^1 (12 - 8z^2 - 4z^4) dz = 5\pi \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{4}{5}\right) = \pi\left(60 - \frac{40}{3} - 4\right) = \pi(56 \times 3 - 40) = \frac{128\pi}{3}$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x,y) = x^2 - y^2$ e sia $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1\}$.

1. Si trovino tutti i punti stazionari **vincolati** per f su D (possono essere meno di sei): (7 pt.)

$(x,y) =$ $\boxed{(2,0)}$

$(x,y) =$ $\boxed{(1,0)}$

$(x,y) =$ $\boxed{(1,\sqrt{3})}$

$(x,y) =$ $\boxed{(1,-\sqrt{3})}$

$(x,y) =$ $\boxed{}$

$(x,y) =$ $\boxed{}$

2. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \boxed{-2}$$

3. Si calcoli (oppure si scriva "non esiste"): (1 pt.)

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \boxed{4}$$

1

Dobbiamo usare i moltiplicatori. Abbiamo

$f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$; $D = \{G_1 \leq 0, G_2 \leq 0\}$

dove $G_1(x,y) = x^2+y^2-4$ $\quad G_2(x,y) = 1-x$

da cui $\nabla G_1 = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ci sono vari casi

(I) Pti critici liberi : $\nabla f = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ $(0,0) \notin D$!!

No sol.

(II.A) Moltiplicatori con G_1 : $\nabla f = \lambda \nabla G_1$, $G_1 = 0$ $G_2 < 0$

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4, \; x > 1 \end{cases}$$

Dato che $x \neq 0$ dalla prima ho $\lambda = 1 \Rightarrow$
$-2y = 2y \Leftrightarrow y = 0$

TROVO $\boxed{(2,0)}$ $\quad$ ($(-2,0)$ NON verifica $x > 1$)

(II.B) Moltiplicatori con G_2 $\quad \nabla f = \lambda \nabla G_2$, $G_1 < 0$, $G_2 = 0$

$$\begin{cases} 2x = -\lambda \\ -2y = 0 \\ x^2+y^2 < 4, \; x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ TROVO $\boxed{(1,0)}$

(III) Due moltiplicatori $\quad \nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2$ $\quad G_1 = G_2 = 0$

TROVO i due punti $\boxed{(1, \pm\sqrt{3})}$

Calcolo f sui punti trovati sopra:

$f(2,0) = 4$ $\quad f(1,0) = 1$ $\quad f(1 \pm \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$

MAX $\qquad\qquad\qquad\qquad$ MIN

4. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = y - 2 \\ y' = -x + 2y - 1 \\ z' = y + z - 3 \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad\quad B(t) := \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (2 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $\quad m_A(\lambda_1) =$ 3 $\quad m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ $\quad m_A(\lambda_2) =$ $\quad m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $\quad m_A(\lambda_3) =$ $\quad m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

2. Si trovi una soluzione **costante** di (Sys), oppure si scriva "non esiste": (3 pt.)

$x(t) =$ 3

$y(t) =$ 2

$z(t) =$ 1

3. Si trovi la soluzione $\bar{Y}(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $\bar{x}(0) = 4$, $\bar{y}(0) = 1$, $\bar{z}(0) = 1$: (4 pt.)

$\bar{x}(t) = e^t(1-2t) + 3$

$\bar{y}(t) = -e^t(2t+1) + 2$

$\bar{z}(t) = -e^t\, t(t+1) + 1$

Fine Test

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ Cerco il pol. caratteristico:

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda(\lambda-2)+1\right) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1) = (1-\lambda)^3.$$

DUNQUE HO SOLO $\boxed{\lambda = 1}$ e $m_A(1) = 3$

Pongo $B = A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vedo che

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $B^2 \neq 0 \Rightarrow m_G(1) = 1$. NOTIAMO che (serve dopo)

posso prendere $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} =: e_1$ $B e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} =: e_2$

POSTO $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

si ha $A = MJM^{-1}$.

(2) Se $\overline{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ allora perché $\overline{Y}$ sia sol. deve essere $0 = A\overline{Y} + B$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ -a+2b = 1 \\ b+c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

(3) Cerco $Y(t) = Y_0(t) + \overline{Y}$. Dunque $Y_0(t)$ è sol. di $Y_0' = AY_0$

(sol. dell'omogenea). Inoltre $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Y(0) = Y_0(0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allora $Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0)$. NOTO che $Y_0(0) = e_3$

e dunque $M^{-1} Y_0(0) = \hat{e}_3 \Rightarrow$

$$Y_0(t) = M e^{tJ} \hat{e}_3 = e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t M \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^t \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1-2t \\ -1-2t \\ -t^2-t \end{bmatrix} = -e^t \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 2t+1 \\ t^2+t \end{pmatrix}$$