Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 2 dicembre 2022

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa **40** Il tempo a disposizione è un ora e mezza.

Inizio Test

1. Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}, \quad , \quad B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$$

1. Si dica se A è aperto: ~~SI~~ NO.
2. Si dica se B è la chiusura di A: ~~SI~~ NO.
3. Si dica se A è la parte interna di B: SI ~~NO~~.
4. Si dica se C è la frontiera di B: SI ~~NO~~. (4 pt.)

2. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definite da:

$$\Phi(x,y) := (2xy, x^2 - y^2) \quad , \quad f(x,y) := \|\Phi(x,y)\| .$$

Si calcolino:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = \boxed{4} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = \boxed{-2} .$$

(4 pt.)

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

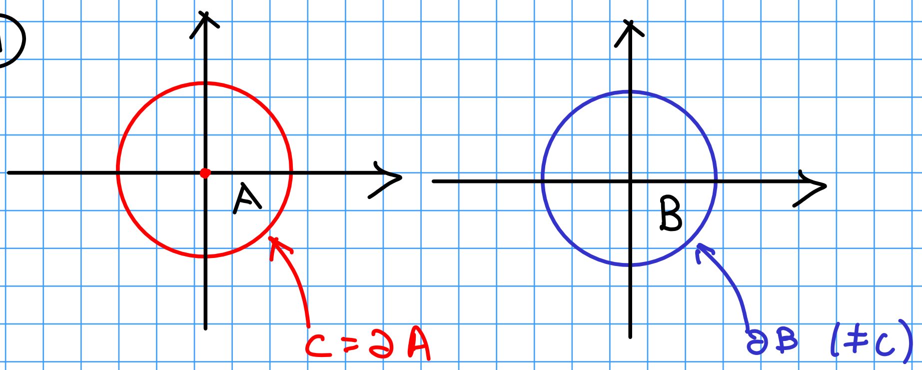
$$f(x,y) := \frac{x^2y^4}{x^4+y^4} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \qquad f(0,0) := 0.$$

1. Si dica se f è continua ~~VERO~~ FALSO.
2. Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera:
   a $f'(0,0)(\vec{v})$ non esiste per nessun $\vec{v}$;
   b $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per alcuni $\vec{v}$ ma non per tutti;
   ~~**c**~~ $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per tutti i $\vec{v}$;
3. Si calcoli $f'(0,0)(1,1)$ oppure si scriva "non esiste":

$$f'(0,0)(1,1) = \boxed{0}$$

4. Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$ ~~VERO~~ FALSO.

①



A è aperto dato che è controimmagine di $]0,1[$ della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$

B è chiuso dato che è controimmagine di $[0,1]$ della stessa f

($]0,1[$ è aperto e $[0,1]$ è chiuso in $\mathbb{R}$)

La parte interna di B è $\{x^2+y^2<1\} \neq A$. $\partial B = \{x^2+y^2=1\} \neq C$.

② In questo caso conviene fare i calcoli:

$$f(x,y) = \|\Phi(x,y)\| = \sqrt{(2xy)^2+(x^2-y^2)^2} = \sqrt{4x^2y^2+x^4-2x^2y^2+y^4} =$$

$$\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4} = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2+y^2 \implies$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \implies \nabla f(2,-1) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

③

(a) $$0 \leq \frac{x^2y^4}{x^4+y^4} = x^2 \underbrace{\frac{y^4}{x^4+y^4}}_{\leq 1} \leq x^2 \quad \text{e} \quad x^2 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

DUNQUE f è continua in zero (e in tutto $\mathbb{R}^2$ ...)

(b) Se $\vec{v} = (v_x, v_y)$ allora

$$f'(0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{(t\cdot v_x)^2(t v_x)^4}{(t v_x)^4+(t v_y)^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t\, v_x^2 v_y^4}{v_x^4+v_y^2} = 0$$

$\exists\ \forall \vec{v}$

(c) in particolare $f'(0)(1,1) = 0$

(d) f non è diff. in $(0,0)$ perché $\vec{v} \longmapsto \dfrac{v_x^2 v_y^4}{v_x^4+v_y^2}$

non è lineare

④ NOTA CHE $f'(x)(\lambda\vec{v}) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+t\lambda\vec{v})-f(x)}{t} =$

$$\lambda \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\lambda\vec{v})-f(x)}{\lambda t} = \lambda \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s\vec{v})-f(x)}{s} = \lambda f'(x)(\vec{v})$$

CONTINUA DOPO

5. Si motivi brevemente la risposta precedente:

Vedo subito che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Dunque la differenziabilità in $(0,0)$ equivale a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0) - 0\cdot x - 0\cdot y}{\|(x,y)\|} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x^2 y^4}{x^4+y^4} = 0.$$ In effetti $$\left|\frac{x^2 y^4}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^4+y^4)}\right| = |x| \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y^4}{x^4+y^4} \leq |x|$$

e $|x| \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$, dunque quel limite fa zero e f è differenziabile.

(6 pt.)

4. Siano $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e supponiamo che esistano in ogni punto x le derivate direzionali seconde $f''(x)(\vec{v}, \vec{w})$ rispetto a due arbitrari vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Si dica quali tra le seguenti affernazioni sono corrette:

1. $f''(x)(t\vec{v}, \vec{w}) = f''(x)(\vec{v}, t\vec{w})$ per ogni x, $\vec{v}$, $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^N$ e t in $\mathbb{R}$: ~~VERO~~ FALSO.
2. Se f è $\mathcal{C}^1$, allora:
   $f''(x)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}) = f''(x)(\vec{v}_1, \vec{w}) + f''(x)(\vec{v}_2, \vec{w})$ per ogni x, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^N$: VERO ~~FALSO~~.
3. Se f è $\mathcal{C}^2$, allora $f''(x)(\vec{v}, \vec{w}) = f''(x)(\vec{w}, \vec{v})$ per ogni x, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^N$: ~~VERO~~ FALSO.

(3 pt.)

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y, z) := (1 + xy)\ln(1 - xz).$$

Si calcolino:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0) = \boxed{0} \quad , \quad \frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}(0,0,0) = \boxed{-6} \quad ,$$

(4 pt.)

6. Si considerino la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ e la funzione $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite da:

$$\gamma(t) := (t, e^t, t^2) \quad , \quad f(x,y,z) = (xz, y^2, z)$$

Si calcoli l'integrale curvilineo di seconda specie:

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \boxed{\frac{e^3}{3} + \frac{5}{12}}$$

(6 pt.)

(4 cont.). Allora per la def. di $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = \lim_{t\to 0} \frac{f'(x_0+t\vec{v})(\vec{w}) - f'(x_0)(\vec{w})}{t}$

$\Rightarrow \quad f''(x_0)(\lambda\vec{v}, \vec{w}) = \lambda f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$.

Per lo stesso motivo $f''(x_0)(\vec{v}, \lambda\vec{w}) = \lambda f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$.

DUNQUE LA PRIMA È VERA

(b) Non è detto che $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w})$ sia bilineare in $(\vec{v}, \vec{w})$ se non si sa che f è C^2 (DETTO A LEZIONE)

(c) Se f è C^2 vale Schwartz $\Rightarrow$ $f''(x_0)(\vec{v}, \vec{w}) = f''(x_0)(\vec{w}, \vec{v})$

(5) $f(x,y,z) = (1+xy)\ln(1-xz)$. Mi ricordo che

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \Rightarrow$$

$$\ln(1-xz) = -xz - \frac{x^2z^2}{2} - \frac{x^3z^3}{3} + o((xy)^3) =$$

$$-xz - \frac{x^2z^2}{2} - \frac{x^3z^3}{3} + o(\|(x,y,z)\|^6) \quad \Rightarrow$$

$$(1+xy)\ln(1-xz) = (1+xy)\left(-xz - \frac{x^2z^2}{2} - \frac{x^3z^3}{3} + o(\|(x,y,z)\|^6)\right) =$$

$$\underbrace{-xz - \frac{x^2z^2}{2} - \frac{x^3z^3}{3} - x^2yz - \frac{x^3yz^2}{2}}_{P_{6,0}(x,y,z)} + o(\|(x,y,z)\|^6)$$

qui sono finiti tre pezzi tutti di ordine superiore alla $\|\cdot\|^6$

Ricordiamoci che, se $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Rightarrow \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(0) =$ coefficiente di $x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3}$

Prendo $\alpha = (1,1,1) \Rightarrow \quad D_\alpha f(0) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}(0,0,0) = 0$

Prendo $\alpha = (3,1,2) \Rightarrow \quad \frac{D_\alpha f(0)}{3!\,1!\,2!} = \frac{1}{12} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}(0,0,0) = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y \partial z^2}(0,0,0) = -6$$

(6)

$\gamma(t) = (t, e^t, t^2) \qquad \vec{f}(x,y,z) = (xz, y^2, z)$

Allora $\gamma'(t) = (1, e^t, 2t)$, $\vec{f}(\gamma(t)) = (t\cdot t^2, e^{2t}, t^2)$

$$\Rightarrow \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t^3, e^{2t}, t^2)\cdot(1, e^t, 2t)\,dt =$$

$$\int_0^1 \left(t^3 + e^{3t} + 2t^3\right)dt = \int_0^1 \left(3t^3 + e^{3t}\right)dt = \left[\frac{3}{4}t^4 + \frac{e^{3t}}{3}\right]_0^1 =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e^3}{3} + \frac{9-4}{12} = \frac{e^3}{3} + \frac{5}{12}$$

7

$$f(x,y) = 2e^{xy-2} - 4x^2 + 2xy - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ye^{xy-2} - 8x + 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{xy-2} + 2x - 2y$$

- Cerco i pti critici:

$$\begin{cases} 4x = y(1+e^{xy-2}) \\ y = x(1+e^{xy-2}) \end{cases} \Rightarrow \quad 4x = y(1+e^{xy-2}) = x(1+e^{xy-2})^2 \Leftrightarrow$$

$\cdot\ x = 0$ oppure

$\cdot\ 4 = (1+e^{xy-2})^2 \Leftrightarrow \pm 2 = (1+e^{xy-2})$ $\nearrow e^{xy-2} = 1$ $\searrow \underset{\text{IMPOSS.}}{e^{xy-2} = -3}$

DUNQUE TROVO $x=0,\ y=0$ OPPURE

$$\begin{cases} 4x = y\cdot 2 \\ e^{xy-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \pm(1,2)$$

TRE PUNTI CRITICI: $\boxed{(0,0) \text{ e } \pm(1,2)}$

- Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2e^{xy-2} - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2e^{xy-2} + 2xye^{xy-2} + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2e^{xy-2} - 2$$

Allora

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -8 & 2+2e^{-2} \\ 2+2e^{-2} & -2 \end{bmatrix} \qquad a_{11} = -8 < 0 \qquad \det = 16 - 4(1+e^{-2})^2 > 0$$

perché $(1+e^{-2})^2 < 4 \Leftrightarrow 1+e^{-2} < 2 \Leftrightarrow e^{-2} < 1$

DUNQUE $\boxed{(0,0) \text{ è pto di MASSIMO}}$

$$H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 2\cdot 2^2\cdot 1 - 8 & 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 + 2 \\ 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 + 2 & 2\cdot 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det < 0$

e $H_f(-1,-2) = H_f(1,2)$ ... (tutto è dispari!)

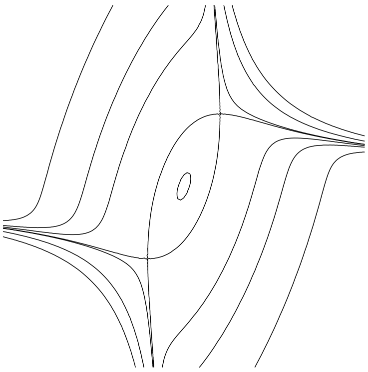
$\Rightarrow$ $\boxed{\pm(1,2) \text{ SONO pti di sella}}$

7. Di questo esercizio è RICHIESTO LO SVOLGIMENTO da farsi nelle facciate bianche che seguono il testo (non verranno accettati altri fogli – non è necessario riportare tutti i calcoli, ma si chiede di rendere esplicito il ragionamento seguito).

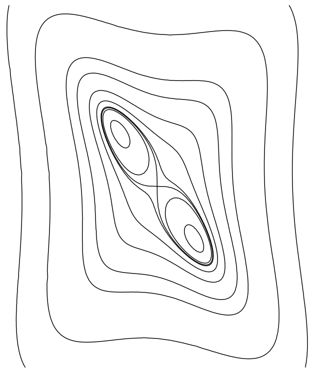
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := 2e^{xy-2} - 4x^2 + 2xy - y^2$$

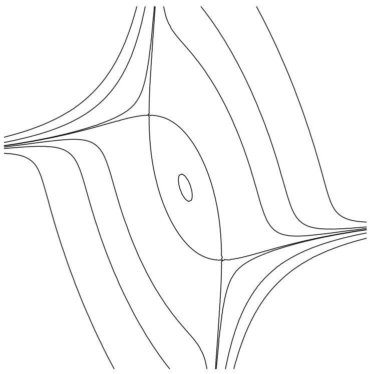
1. Si trovino tutti i punti stazionari indicando per ognuno se si tratta di un punto di massimo o minimo relativo, di un punto di sella o eventuamente di un punto che non rientra in nessuno dei casi precedenti.
2. Si dica se una una delle seguenti figure - e quale - rappresenta le curve di livello $\{f(x, y) = c\}$ (per alcuni valori di c):



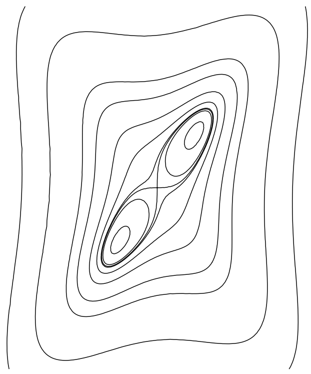
(a)



(b)



(c)



(d)

3. Si dica se f ha massimo su $\mathbb{R}^2$:
4. Si dica se f ha minimo su $\mathbb{R}^2$:

Svolgimento ultimo esercizio (13 pt.)

CONT. • Dato che ho due selle in $\pm(1,2)$ e un minimo in $(0,0)$ $\Rightarrow$ l'unica figura compatibile è la $\boxed{a}$

• Dato che tra i punti trovati NON C'È NESSUN MINIMO LOCALE $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ NON HA MINIMO}}$

• Se ci mettiamo sulla retta $y=x$ e facciamo $\lim_{x\to+\infty} f(x,x)$ troviamo $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2-2} - 3x^2 = +\infty$ (VINCE L'ESPONENZIALE)

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ NON HA MASSIMO}}$

Fine Test