Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 16 settembre 2022

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40. Il tempo a disposizione è 2 ore

Inizio Test

**1.** (9 p.) Consideriamo la seguente equazione differenziale lineare:

$$x(x-2)y'' - (4x-8)y' + 4y = 48x^2 \tag{E}$$

Cerchiamo soluzioni sviluppabili in serie di potenze vicino a zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Si trovi una relazione ricorsiva per i coefficienti $a_n$: (2 pt.)

$$a_n(n-4)(n-1) - a_{n+1}2(n+1)(n-4) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ 48 & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

se $n \neq 2$

se $n = 2$

OPPURE

$a_0 + 2a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 4$, $a_4 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}\,\frac{n-1}{n+1} \quad \forall n \geq 6$$

2. Se aggiungiamo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 1,\ y'(0) = 0}$, allora: (1 pt.)

- [a] esiste una e una sola soluzione di (E) con tali condizioni;
- [b] esiste una soluzione di (E) con tali condizioni, ma non è unica;
- [X] non esiste nessuna soluzione di (E) con tali condizioni.

3. Se aggiungiamo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 0,\ y^{(2)}(0) = 0}$, allora: (1 pt.)

- [a] esiste una e una sola soluzione di (E) con tali condizioni;
- [X] esiste una soluzione di (E) con tali condizioni, ma non è unica;
- [c] non esiste nessuna soluzione di (E) con tali condizioni.

4. Si consideri una soluzione $\tilde{y}$ verificante le condizioni iniziali $\tilde{y}(0) = \tilde{y}'(0) = 0$. Si trovi il valore di $\tilde{y}''(0)$ oppure si barri una delle caselle sottostanti:

$\tilde{y}''(0) =$ $0$ / $\tilde{y}$ non esiste / $\tilde{y}''(0)$ non è univocamente determinato (2 pt.)

5. Si trovi la soluzione $\tilde{y}$ di (E) verificante $\tilde{y}(0) = -2$, $\tilde{y}^{(5)}(0) = 0$ (ammesso che esista e sia unica– altrimenti si barrino le caselle corrispondenti). (3 pt.)

$\tilde{y}(x) =$ $-2 + x + 4x^3 + x^4$

/ $\tilde{y}$ non esiste / $\tilde{y}$ non è unica

(1)

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) x^n$

$$y''(x) = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) n x^{n-1}$$

$\Rightarrow$

$x(x-2)y'' - (4x-8)y' + 4y = x^2 y'' - 2x y'' - 4x y' + 8y' + 4y =$

$\sum_0^\infty a_n n(n-1) x^n - 2a_{n+1}(n+1) n x^n - 4 a_n n x^n + 8 a_{n+1}(n+1) x^n + 4 a_n x^n =$

$\sum_0^\infty \{ a_n (n^2 - n - 4n + 4) + a_{n+1}(-2(n+1)n + 8(n+1)) \} x^n =$

$\sum_0^\infty \{ a_n (n^2 - 5n + 4) - a_{n+1}\, 2(n+1)(n-4) \} x^n =$

$\sum_0^\infty \{ a_n (n-4)(n-1) - a_{n+1}\, 2(n+1)(n-4) \} x^n \Rightarrow$

$$(R) \quad a_n (n-4)(n-1) - a_{n+1}\, 2(n+1)(n-4) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ 48 & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

Se metto $n = 0 \Rightarrow a_0(-4)(-1) - a_1 2(1)(-4) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 + 2a_1 = 0}$

Se metto $n = 1 \Rightarrow 0 - a_2 (2)(2)(-3) \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0}$

Se metto $n = 2 \Rightarrow 0 - a_3 (2)(3)(-2) = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 4}$

Se metto $n = 3 \Rightarrow 4(-1)(2) - a_4 (2)(4)(-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_4 = 1}$

Se metto $n = 4 \Rightarrow 0 = 0$ NESSUNA CONDIZIONE SU $a_5$

Da $n = 6$ in avanti posso scrivere (semplificando $n-4$)

$$a_{n+1} = \frac{a_n (n-1)}{2(n+1)}$$

(2) La condizione $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$ non è compatibile con la condizione $2a_0 + a_1 = 0 \Leftrightarrow 2y(0) + y'(0) = 0$

(3) La condizione $y(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$. La condizione $y''(0) = 0$ $\Leftrightarrow a_2 = 0$ (TORNA). Dunque esiste la soluzione ma ce ne sono infinite

dato che posso scegliere $a_5$ come mi pare.

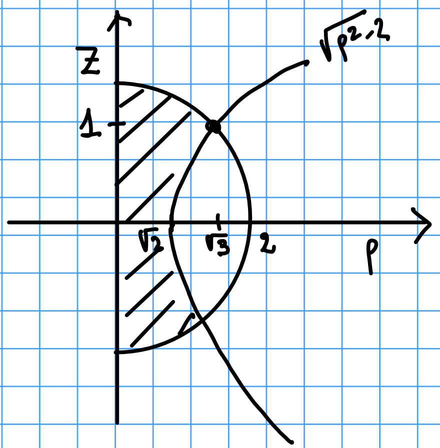
(4) Metto $a_0=a_1=0$ e $a_5$ arbitrario $\Rightarrow$ trovo $\infty$ soluzioni ma per ognuna $y''(0)=0$

(5) Se impongo $y(0)=-2 \Rightarrow a_0=-2 \Rightarrow a_1=1$. Inoltre $a_2=0$, $a_3=4$, $a_4=1$ sono obbligatori. Da $y^{(5)}(0)=0$ ottengo $a_5=0$ da cui, per (R), $a_n=0 \quad \forall n \geq 5$

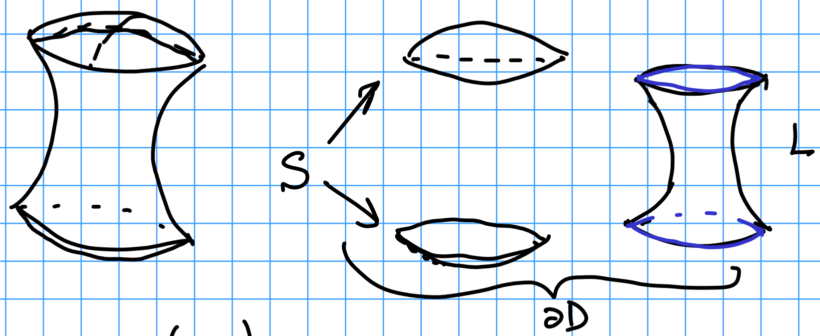
---

(2) Per visualizzare l'insieme possiamo notare che, ponendo $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ si ha $D=\{\rho^2+z^2\leq 4,\ \rho^2\leq z^2+2\}=$

$\rho=\sqrt{2+z^2}$




D si ottiene ruotando la figura tratteggiata attorno all'asse z




W sono le due circonferenze (blu) in cui S e L si incollano

(1) $W=\Sigma_1^*(\partial D)$ mentre $\Sigma_1(\partial D)=0$

(2) Il punto $P_0=(1,\sqrt{2},-1)$ sta in W, come si vede subito, $\Rightarrow \nexists\ \nu(P_0)$

(3) Il punto $P_1=\left(\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$ sta in L e non in S $(z^2<1)$.

Dunque devo considerare la funzione $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-2$ (che vale zero in $P_1$, è $\leq 0$ in D) e calcolare

$$\hat{\nu}(P_1)=\frac{\nabla G(P_1)}{|\nabla G(P_1)|}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\begin{pmatrix}2x\\2y\\-2z\end{pmatrix}_{x=\frac{3}{2},y=0,z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

(4) $\vec{f}$ è radiale! (5) $\operatorname{div} f=3\neq 0$

(6) Su S si ha $\vec{f}(x,y,z)\cdot\hat{\nu}(x,y,z)=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\dfrac{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $=\frac{4}{2}=2$. Dunque il flusso di $\vec{f}$ attraverso S è semplicemente uguale a $2\,\text{Area}(S)=4\,\text{Area}(S^+)$

dove $S^+ = \{x^2+y^2+z^2 = 4 \quad z \geq 1\}$. Posso calcolare l'area vedendo $S^+$ come grafico di $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ su $B = \{x^2+y^2 \leq 3\}$. Allora $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$|\nabla f| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}$ e

$$\text{Area}(S^+) = \iint_B \sqrt{1+|\nabla f|^2(x,y)}\,dx\,dy = \iint_B \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy =$$ (POLARI)

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = 2\pi \int_0^3 \frac{ds}{\sqrt{4-s}} =$$

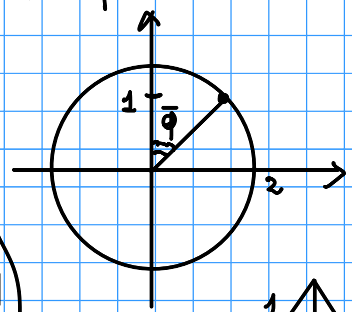
$$2\pi\Big[-2\sqrt{4-s}\Big]_0^3 = 2\pi\left(-2+2\sqrt{4}\right) = 4\pi$$

$\Rightarrow$ Flusso $= 4 \cdot 4\pi = 16\pi$

OPPURE IN COORD. SFERICHE

$x = 2\cos\theta\sin\varphi$, $y = 2\sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\varphi$ $\quad \|\vec{N}_r\| = 4\sin\varphi$

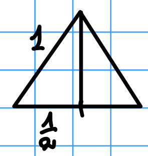
e




$\cos\bar\varphi = \frac{1}{2}$

$\Updownarrow$

$\bar\varphi = \frac{\pi}{3}$




$$\text{Area}(S^+) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\bar\varphi} 4\sin\varphi\,d\varphi =$$

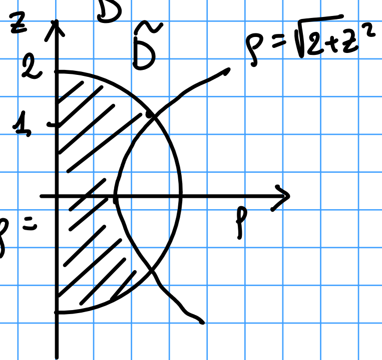
$$8\pi\int_0^{\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi = 8\pi\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi/3} = 8\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$

$= 4\pi$ (come sopra)

(2) Uso il teorema della divergenza per dire che il flusso su $\partial D =$

$$= \iiint_D 3\,dx\,dy\,dz = (\text{coord. polari in } x,y) = 2\pi\iint_{\tilde D} 3\rho\,d\rho\,dz \quad \text{dove}$$

$\tilde D = \{z^2+\rho^2 \leq 4,\ \rho^2 \leq 2+z^2\}$ $\rightarrow$




Dunque viene $3\pi\int_0^1 dz\int_0^{\sqrt{2+z^2}} 2\rho\,d\rho + 3\pi\int_1^2 dz\int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2\rho\,d\rho =$

$$3\pi\int_0^1 (2+z^2)\,dz + 3\pi\int_1^2 (4-z^2)\,dz =$$

4

$$3\pi\left[2z+\frac{z^3}{3}\right]_0^1 + 3\pi\left[4z-\frac{z^3}{3}\right]_1^2 = 3\pi\left(2+\frac{1}{3}\right) + 3\pi\left(8-\frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}\right) =$$

$-7/3$

$\pi(6+1+12-7) = 12\pi$ DUNQUE

$$\iint_L \hat f\cdot\hat\nu\,d\sigma = \iint_{\partial D} \hat f\cdot\hat\nu\,d\sigma - \iint_S \hat f\cdot\hat\nu\,d\sigma = 12\pi - 16\pi = -4\pi$$

**2.** (11 p.) Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$
\begin{aligned}
D &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \le 2+z^2\} \\
S &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4, z^2 \ge 1\} \\
L &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2+z^2 = x^2+y^2, z^2 \le 1\} \\
W &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 3, z^2 = 1\}
\end{aligned}
$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$$

Se $P \in \partial_{reg} D$ (frontiera regolare di $D$) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a $\partial D$ uscente da $D$, nel punto $P$. Ricordiamo anche che $\partial D$ è una superfice (non parametrica) regolare a tratti.

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta. (1 pt.)
   - [a] $W \subset \Sigma(\partial D)$, ma $W \neq \Sigma(\partial D)$;
   - [b] $W = \Sigma(\partial D) \neq \Sigma^*(\partial D)$;
   - [c] $W \subset \Sigma^*(\partial D), W \neq \Sigma(\partial D), W \neq \Sigma^*(\partial D)$;
   - [X] $W = \Sigma^*(\partial D) \neq \Sigma(\partial D)$;
   - [e] nessuna delle precedenti.
2. Si calcoli: $\hat{\nu}(1, \sqrt{2}, -1) =$ [ ] $\vec{\mathbf{i}}+$ [ ] $\vec{\mathbf{j}}+$ [ ] $\vec{\mathbf{k}}/$ [X non esiste]; (1 pt.)
3. Si calcoli: $\hat{\nu}(3/2, 0, -1/2) =$ $\frac{3}{\sqrt{10}}$ $\vec{\mathbf{i}}+$ $0$ $\vec{\mathbf{j}}+$ $\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\vec{\mathbf{k}}/$ [non esiste]; (1 pt.)
4. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo: [X vero] [falso]. (1 pt.)
5. Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale: [vero] [X falso]. (1 pt.)
6. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (3 pt.)

   $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) =$ $16\pi$ .

7. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (3 pt.)

   $\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) =$ $-4\pi$ .

**3.** (11 p.) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2 + 2e^{6-3xy}$$

Sia inoltre

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 = 4\}.$$

1. Si trovino tutti i punti stazionari di $f$ e per ognuno si dica si si tratta di massimi relativi, minimi relativi o altro. (le caselle di risposta possono essere più di quelle necessarie) (4 pt.)

$(x,y) =$ $(0,0)$ punto di SELLA

$(x,y) =$ $(1,2)$ punto di MINIMO

$(x,y) =$ $(-1,-2)$ punto di MINIMO

$(x,y) =$ punto di

$(x,y) =$ punto di

2. Si calcolino (oppure si scriva "non esiste"): (3 pt.)

$\min_{(x,y)\in M} xy = -1$ , $\max_{(x,y)\in M} xy = 1$.

3. Si calcolino (oppure si scriva "non esiste"): (4 pt.)

$\min_{(x,y)\in M} f(x,y) = 6+2e^3$ , $\max_{(x,y)\in M} f(x,y) = 2+2e^9$.

(potrebbe essere utile la risposta data nel punto precedente).

---

$f(x,y) = 4x^2+2xy+y^2+2e^{6-3xy}$ ;

$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x+2y-6ye^{6-3xy}$ , $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x+2y-6xe^{6-3xy}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8+18y^2e^{6-3xy}$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2+18x^2e^{6-3xy}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2-6e^{6-3xy}+18xye^{6-3xy}$

Pti critici $\begin{cases} 4x = y(-1+3e^{6-3xy}) \\ y = x(-1+3e^{6-3xy}) \end{cases} \Rightarrow 4x = x(-1+3e^{6-3xy})^2$

Dunque si ha $x=0$ oppure $4 = (3e^{6-3xy}-1)^2 = 0$.

La prima condizione messa nel sistema produce la sol. $\boxed{(0,0)}$

La seconda condizione equivale a $3e^{6-3xy}-1 = \pm 2$ cioè

$3e^{6-3xy} = \begin{cases} 3 \\ -1 \leftarrow \text{IMPOSSIBILE} \end{cases} \Leftrightarrow e^{6-3xy} = 1 \Leftrightarrow 6-3xy=0 \Leftrightarrow \underline{xy=2}$

Se mettiamo $xy=2$ nel sistema

$\begin{cases} xy=2 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow$ trovo $\boxed{\pm(1,2)}$

- Calcolo gli Hessiani

(•) $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 2-6e^6 \\ 2-6e^6 & 2 \end{bmatrix}$ ha det $16-(2-6e^6)^2 < 0$ $\underline{\text{SELLA}}$

(•) $Hf(\pm(1,2)) = \begin{bmatrix} 8+18\cdot 4 & 2-6 \\ 2-6 & 2+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}$ det $>0$, $a_{11}>0$ MINIMI

- Se $g(x,y) = 4x^2+y^2-4 \Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix}$; se $h(x) = xy$ $\nabla h = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Cerco pti crit. vincolati per $h$ su $M = \{g=0\}$. Uso i moltiplicatori

$\begin{cases} y = 8\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow x = 2\lambda(8\lambda x) = 16\lambda^2 x \Leftrightarrow x=0$ oppure $\lambda = \pm 1/4$

MA SE $x=0$ dalla prima riga $\Rightarrow y=0$ IMPOSSIBILE

Dunque $\lambda = \pm 1/4$. TROVO ALLORA

$\begin{cases} y=2x \\ x=y/2 \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 8x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm\sqrt{2}/2 \end{cases}$ | se prendo $\lambda = -\frac{1}{4}$ trovo $y=\mp\sqrt{2}$ $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

IN DEFINITIVA ho 4 pti critici vincolati $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}\right)$. Se ci calcolo $h$ trovo $\pm 1$ $\Rightarrow$ $\max_M xy = 1$ $\min_M xy = -1$

- Per l'ultimo punto noto che, se $4x^2+y^2=4 \Rightarrow f(x,y) = 4+2xy+2e^{6-3xy}$ e $xy$ varia tra $-1$ e $1$ per il punto precedente. DUNQUE

$\max_{(x,y)\in M} f(x,y) = \max_{-1\le t\le 1} \underbrace{4+2t+2e^{6-3t}}_{\varphi(t)}$. Ma $\varphi'(t) = 2-6e^{6-3t}$ e $\varphi' \ge 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3} \geq e^{6-3t} \iff 6-3t \leq -\ln(3) \iff t \geq 2 + \frac{\ln(3)}{3} =: \bar{t}$. Ma $\bar{t} > 0 \Rightarrow \varphi$ decresce su $[-1,1]$.

Dunque $\max_{[-1,1]} \varphi = \varphi(-1) = 2 + e^9$ $\min_{[-1,1]} \varphi = \varphi(1) = 6 + e^3$

**4.** (9 p.) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 2y - t \\ z' = y + z + 1 - t \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \qquad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} -1 \\ -t \\ 1-t \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di $A$ e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (2 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $m_A(\lambda_1) =$ 3 $m_G(\lambda_1) =$ 1 ;

$\lambda_2 =$ $m_A(\lambda_2) =$ $m_G(\lambda_2) =$ ;

$\lambda_3 =$ $m_A(\lambda_3) =$ $m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

2. Si trovi una soluzione $\bar{Y}$ di (Sys) del tipo $\bar{x}(t) = at$, $\bar{y}(t) = bt$, $\bar{z}(t) = ct$ con $a, b, c$ numeri reali da determinare, oppure si scriva "non esiste": (3 pt.)

$\bar{x}(t) = -t$

$\bar{y}(t) = 0$

$\bar{z}(t) = t$

3. Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$: (4 pt.)

$x(t) = -t + (-1+t)e^t$

$y(t) = t e^t$

$z(t) = t + (1 + t^2/2)e^t$

Fine Test

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• pol. caratt.

$$\to p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda) + (1-\lambda) =$$

$$(1-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 + 1) = (1-\lambda)^3 \Rightarrow \text{UN SOLO AUTOVALORE } \boxed{\lambda = 1}$$

• $B := A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 2 $\Rightarrow \dim \ker B = 1$

$\leftarrow \det \neq 0$

$\Rightarrow \dim \ker B^2 = 2$ e $\dim \ker B^3 = 3 \Rightarrow \boxed{m_G(1) = 1}$

• Calcolo $B^2$ (per dopo)

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Cerco $e_3$ tale che $B^2 e_3 \neq 0$. Se $e_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ allora

$B e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x+y \end{bmatrix}$ dunque $x \neq y$. Posso prendere $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

oppure (torno meglio con l'ultima domanda) $e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Con questa seconda scelta ho

$$e_2 = B e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_1 = B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

se $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = MJM^{-1}$

• Cerco $\bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t$. Se impongo l'equazione ho $\bar{Y}'(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} t + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t}_{B(t)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

si vede che la seconda eguaglianza vale !! $\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Dunque $\bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$

- Cerco $Y(t) = \bar{Y}(t) + Y_0(t)$ dove $Y_0$ è una sol. dell'omogenea

Dato che $\bar{Y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ la $Y_0$ deve verificare la cond iniziale $Y_0(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(che coincide con $e_3$ trovato sopra). Per la formula risolutiva:

$$Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} e_3 = M \cdot e^{tJ} \hat{e}_3 \quad \left( \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= M \; e^{t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{t} \begin{bmatrix} t-1 \\ t \\ t^2/2 + 1 \end{bmatrix} \implies$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + e^{t} \begin{pmatrix} -1 + t \\ t \\ 1 + t^2/2 \end{pmatrix}$$