Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 22 luglio 2022

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40. Il tempo a disposizione è 2 ore

Inizio Test

1. (9 p.) Consideriamo la seguente equazione differenziale lineare:

$$x(x-2)y'' - (4x-8)y' + 4y = 288x \tag{E}$$

Cerchiamo soluzioni sviluppabili in serie di potenze vicino a zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Si trovi una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n: (2 pt.)

$$a_n(n-4)(n-1) - a_{n+1}2(n+1)(n-4) = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 288 & n = 1 \end{cases}$$

$a_0 + 2a_1 = 0$ OPPURE $a_2 = 24$ $\quad a_{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)} a_n$ se $n \geq 5$

$a_3 = 4$ $\quad a_4 = 1$

2. Se aggiungiamo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 0,\ y'(0) = 0}$, allora: (1 pt.)

   - [a] esiste una e una sola soluzione di (E) con tali condizioni;
   - [b] ~~X~~ esiste una soluzione di (E) con tali condizioni, ma non è unica;
   - [c] non esiste nessuna soluzione di (E) con tali condizioni.

3. Se aggiungiamo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 0,\ y^{(4)}(0) = 0}$, allora: (1 pt.)

   - [a] esiste una e una sola soluzione di (E) con tali condizioni;
   - [b] esiste una soluzione di (E) con tali condizioni, ma non è unica;
   - [c] ~~X~~ non esiste nessuna soluzione di (E) con tali condizioni.

4. Si consideri una soluzione $\tilde{y}$ verificante le condizioni iniziali $\tilde{y}(0) = \tilde{y}'(0) = 0$. Si trovi il valore di $\tilde{y}''(0)$ oppure si barri una delle caselle sottostanti:

   $\tilde{y}''(0) = \boxed{48}$ / $\boxed{\tilde{y} \text{ non esiste}}$ / $\boxed{\tilde{y}''(0) \text{ non è univocamente determinato}}$ (2 pt.)

5. Si trovi la soluzione $\tilde{y}$ di (E) verificante $\tilde{y}(0) = -2$, $\tilde{y}^{(5)}(0) = 0$ (ammesso che esista e sia unica– altrimenti si barrino le caselle corrispondenti). (3 pt.)

   $$\tilde{y}(x) = -2 + x + 24x^2 + 4x^3 + x^4$$

   / $\boxed{\tilde{y} \text{ non esiste}}$ / $\boxed{\tilde{y} \text{ non è unica}}$

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) x^n$

$$y''(x) = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)n\, x^{n-1}$$

$\Rightarrow$

$x(x-2)y'' - (4x-8)y' + 4y = x^2 y'' - 2x y'' - 4x y' + 8y' + 4y =$

$\sum_0^\infty a_n n(n-1)x^n - 2a_{n+1}(n+1)n\, x^n - 4a_n n\, x^n + 8a_{n+1}(n+1)x^n + 4a_n x^n =$

$\sum_0^\infty \{a_n(n^2 - n - 4n + 4) + a_{n+1}(-2(n+1)n + 8(n+1))\} x^n =$

$\sum_0^\infty \{a_n(n^2 - 5n + 4) - a_{n+1}\, 2(n+1)(n-4)\} x^n =$

$\sum_0^\infty \{a_n (n-4)(n-1) - a_{n+1}\, 2(n+1)(n-4)\} x^n \Longrightarrow$

$$(R) \quad a_n(n-4)(n-1) - a_{n+1}\,2(n+1)(n-4) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 288 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Se in (R) metto

$n=0 \Rightarrow a_0(-4)(-1) - a_1\, 2(1)(-4) = 0 \iff \boxed{a_0 + 2a_1 = 0}$

$n=1 \Rightarrow -a_2\, 2(3)(-2) = 288 \iff \boxed{a_2 = \frac{288}{12} = 24}$

$n=2 \Rightarrow a_2(-2)(1) - a_3\, 2(3)(-2) = 0 \iff \boxed{a_3 = \frac{a_2}{6} = 4}$

$n=3 \Rightarrow a_3(-1)(2) - a_4\, 2(4)(-1) = 0 \iff \boxed{a_4 = \frac{a_3}{4} = 1}$

$n=5 \Rightarrow 0=0$ NESSUNA CONDIZIONE

$n \geq 5 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{n-1}{2(n+1)} a_n \Leftarrow$ da qui segue che $\sum a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R = 2 = \left(\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-1}$ (se gli $a_n \neq 0 \iff a_5 \neq 0$)

DUNQUE HO LE CONDIZIONI

$\left[\begin{array}{l} 2a_1 + a_0 = 0, \quad a_2 = 24, \ a_3 = 4, \ a_4 = 1 \\ \text{e } a_5 \text{ è libero} \end{array}\right]$

• La condizione $y(0) = -y'(0)$ è compatibile perché $2 \cdot 0 + 0 = 0$

dato però che a_5 è libero ho infinite soluzioni

- La condizione $y(0)=0 \; y^{(4)}=0$ è incompatibile con la condizione $a_4=1$

- Ci sono infinite $\tilde{y}$ con la condizione $\tilde{y}(0)=\tilde{y}'(0)=0$. PERÒ per tutte queste soluzioni $a_2=24 \Leftrightarrow \boxed{\tilde{y}''(0)=48}$

- Se prendo $\tilde{y}(0)=-2 \Rightarrow a_0=-2 \Rightarrow a_1=1 \quad (2a_1+a_0=0)$.

  Se prendo $a_5=0 \Rightarrow a_n=0 \;\; \forall n \geq 5$. Gli altri coeff. sono dati sopra $\Rightarrow y(x)=-2+x+24x^2+4x^3+x^4$

2. (11 p.) Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4, x^2+y^2 \geq 2+z^2\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4, z^2 \leq 1\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2+z^2 = x^2+y^2, z^2 \leq 1\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 3, z = 1\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$$

Se $P \in \partial_{reg}D$ (frontiera regolare di D) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a ∂D uscente da D, nel punto P.

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta. (1 pt.)

   $\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{2}$

   - [a] $B \subset \Sigma(\partial D)$, ma $B \neq \Sigma(\partial D)$;
   - [b] $B = \Sigma(\partial D) \neq \Sigma^*(\partial D)$;
   - [X] $B \subset \Sigma^*(\partial D), B \neq \Sigma(\partial D), B \neq \Sigma^*(\partial D)$;
   - [d] $B = \Sigma^*(\partial D) \neq \Sigma(\partial D)$;
   - [e] nessuna delle precedenti.

2. Si calcoli: $\hat{\nu}(1, \sqrt{2}, -1) = \boxed{}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{}\,\vec{\mathbf{k}}$ / [non esiste] X; (1 pt.)

3. Si calcoli: $\hat{\nu}(3/2, 0, -1/2) = \boxed{-\frac{3}{\sqrt{10}}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-\frac{1}{\sqrt{10}}}\,\vec{\mathbf{k}}$ / [non esiste]; (1 pt.)

4. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo: [vero] X [falso]. (1 pt.)

5. Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale: [vero] [falso] X. (1 pt.)

6. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (3 pt.)

   $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{16\pi}$.

7. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (3 pt.)

   $\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \boxed{-8\pi}$.

$D=\{x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\ge 2+z^2\}$

$\partial D=\{x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\ge 2+z^2\}\cup\{x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2=2+z^2\}=$

$\{x^2+y^2+z^2=4,\ 4-z^2\ge 2+z^2\}\cup\{2+z^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2=2+z^2\}=$

$\{x^2+y^2+z^2=4,\ z^2\le 1\}\cup\{x^2+y^2=2+z^2,\ z^2\le 1\}$

$\partial_{reg}D=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z^2<1\}\cup\{x^2+y^2=2+z^2,\ z^2<1\}$

∂D è una superficie reg. a tratti con $\Sigma(\partial D)=0$.

$\Sigma^*(\partial D)=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z^2=1\}=\{x^2+y^2=3, z=1\}\cup\{x^2+y^2=3, z=-1\}$

(contiene B ma non coincide con B)

La normale è

$$\hat\nu(x,y,z)=\frac{\nabla(x^2+y^2+z^2-4)}{|\nabla(x^2+y^2+z^2-4)|}=\begin{pmatrix}x/2\\y/2\\z/2\end{pmatrix}\quad \text{se}\quad x^2+y^2+z^2=4\quad -1<z<1$$

$$\hat\nu(x,y,z)=\frac{\nabla(2+z^2-x^2-y^2)}{|\nabla(2+z^2-x^2-y^2)|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix}-x\\-y\\z\end{pmatrix}\quad \text{se}\quad 2+z^2=x^2+y^2\quad -1<z<1$$

(NEI PUNTI DI ∂D in cui $z=\pm1$ $\hat\nu$ non esiste)

- $\vec f$ è conservativo ($\operatorname{rot}\vec f=0$ e $\mathbb{R}^3$ è s.c. — oppure si vede che $\vec f=\nabla\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)$)

- $\operatorname{div}\vec f=3 \Rightarrow$ NON è SOLENOIDALE

- $\Phi(\vec f,S,\hat\nu)=\iint_S \vec f\cdot\hat\nu\,d\sigma=\iint_S (x\vec i+y\vec j+z\vec k)\cdot\frac{(x\vec i+y\vec j+z\vec k)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$

$$\iint_S\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sigma=\iint_S 2\,d\sigma=2\,\text{Area}(S)\underset{\text{(coord. sferiche)}}{=}$$

$$2\iint_{\substack{0\le\theta\le2\pi\\ \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3}{2}\pi}}4\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi=16\pi\left[-\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=-16\pi\left(-\frac12-\frac12\right)=16\pi$$

- Per il teorema della div.: $\iint_{\partial D}\vec f\cdot\hat\nu\,d\sigma=\iiint_D \operatorname{div}\vec f\,dx\,dy\,dz=$

$$3\iiint_D dx\,dy\,dz=3\int_{-1}^{1}\left(\iint_{2+z^2\le x^2+y^2\le 4-z^2}dx\,dy\right)dz=$$

$$3\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\sqrt{2+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \rho\, d\rho\right) d\theta\right) dz =$$

$$2\pi \cdot 3 \cdot 2\int_0^1 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\sqrt{2+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} dz = 6\pi\int_0^1 \left(4-z^2-2-z^2\right) dz =$$

$$6\pi \int_0^1 (2-2z^2)\, dz = 6\pi\left[2z-\frac{2}{3}z^3\right]_0^1 = 6\pi\left(2-\frac{2}{3}\right) =$$

$$6\pi\,\frac{4}{3} = 8\pi$$

$$\Rightarrow \iint_L \hat{g}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{\partial D} \hat{g}\,\hat{\nu}\, d\sigma - \iint_S \hat{g}\cdot\hat{j} = 8\pi - 16\pi = -8\pi$$

3. (11 p.) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2e^{6-\frac{3}{2}xy}$$

Sia inoltre

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 4\}.$$

1. Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno si dica si si tratta di massimi relativi, minimi relativi o altro. (le caselle di risposta possono essere più di quelle necessarie) (4 pt.)

$(x,y) =$ (0,0) punto di sella

$(x,y) =$ (2,2) punto di minimo

$(x,y) =$ (2,-2) punto di minimo

$(x,y) =$ punto di

$(x,y) =$ punto di

2. Si calcolino (oppure si scriva "non esiste"): (3 pt.)

$\min_{(x,y)\in M} xy =$ -2 , $\max_{(x,y)\in M} xy =$ 2.

3. Si calcolino (oppure si scriva "non esiste"): (4 pt.)

$\min_{(x,y)\in M} f(x,y) =$ $6+2e^3$, $\max_{(x,y)\in M} f(x,y) =$ $2+2e^9$.

(potrebbe essere utile la risposta data nel punto precedente).

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2e^{6-\frac{3}{2}xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3y\, e^{6-\frac{3}{2}xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 3x\, e^{6-\frac{3}{2}xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{9}{2}y^2 e^{6-\frac{3}{2}xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{9x^2}{2} e^{6-\frac{3}{2}xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 - 3e^{6-\frac{3}{2}xy} + \frac{9}{2}xy\, e^{6-\frac{3}{2}xy}$$

$$1 - 3 + \frac{9}{2}4 = 1-3+18$$

PTI CRITICI:

$$\begin{cases} 2x = -y + 3y e^{6-\frac{3}{2}xy} \\ 2y = -x + 3x e^{6-\frac{3}{2}xy} \end{cases} \Rightarrow 4x = 2y\left(-1+3e^{6-\frac{3}{2}xy}\right) = x\left(-1+3e^{6-\frac{3}{2}xy}\right)^2$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ oppure } 4 = \left(-1+3e^{6-\frac{3}{2}xy}\right)^2$$

Se $x=0$ allora $y=0$ se $x \neq 0$ deve essere $-1+3e^{6-\frac{3}{2}xy} = \pm 2$

MA IL CASO -2 non è possibile perché avrei $3e^{6-\frac{3}{2}xy} = -1$ dunque deve essere $3e^{6-\frac{3}{2}xy} = 3 \iff e^{6-\frac{3}{2}xy} = 1 \iff 6 - \frac{3}{2}xy = 0 \iff xy = 4$

DUNQUE ho il sistema:

$$\begin{cases} xy = 4 \\ 2x = -y + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 4 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ x = y \end{cases} \iff (x,y) = \pm(2,2)$$

CALCOLO GLI Hessiani:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1-3e^6 \\ 1-3e^6 & 2 \end{bmatrix} \quad \det < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ di sella}$$

$$H_f(2,2) = \begin{bmatrix} 20 & 16 \\ 16 & 20 \end{bmatrix} \quad a_{11} > 0 \ \det > 0 \Rightarrow (2,2) \text{ pto di minimo}$$

(e stesso per $(-2,-2)$)

Se considero $g(x,y) = xy$ su $M = \{x^2+y^2 = 4\}$ ho:

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

MOLTIPLICO la I° riga per y e la II° riga per x

$$\begin{cases} x^2 = 2\lambda xy \\ y^2 = 2\lambda xy \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 = x^2+y^2 = 4\lambda xy \quad . \ \boxed{\lambda xy = 1}$$

Moltiplico la I° riga per x e la II° riga per y

$$\begin{cases} xy = 2\lambda x^2 \\ xy = 2\lambda y^2 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2xy = 2\lambda(x^2+y^2) = 8\lambda \quad \boxed{4\lambda = xy}$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 = \lambda xy = 1 \iff \lambda = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow xy = \pm 2$$

Dato che $\boxed{t = xy}$ varia tra -2 e 2 allora su M

$f(x,y) = 4 + t + 2e^{6-\frac{3}{2}t} =: h(t)$ ⇐ BASTA TROVARE $\max/\min_{-2\le t\le 2} h(t)$

$h'(t) = 1 + 2e^{6-\frac{3}{2}t}\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - 3e^{6-\frac{3}{2}t}$

MA $h'(t)$ è crescente e $h'(2) = 1 - 3e^{6-3} = 1 - 3e^{3} < 0$

dunque $h'(t) < 0 \quad \forall t \in [-2,2] \Rightarrow$

$\max_{-2\le t\le 2} h(t) = h(-2) = 4 - 2 + 2e^{9} = 2 + 2e^{9}$

$\min_{-2\le t\le 2} h(t) = h(2) = 4 + 2 + 2e^{3} = 6 + 2e^{3}$

4. (9 p.) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = y + 1 - 2t \\ y' = -x + 2y + 2 - 3t \\ z' = y + z - 1 - t \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B(t) := \begin{bmatrix} 1-2t \\ 2-3t \\ -1-t \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (2 pt.)

$\lambda_1 =$ 1 $m_A(\lambda_1) =$ 3 $m_G(\lambda_1) =$ 1;

$\lambda_2 =$ $m_A(\lambda_2) =$ $m_G(\lambda_2) =$;

$\lambda_3 =$ $m_A(\lambda_3) =$ $m_G(\lambda_3) =$

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

2. Si trovi una soluzione di (Sys) del tipo $x(t) = at$, $y(t) = bt$, $z(t) = ct$ con a, b, c numeri reali da determinare, oppure si scriva "non esiste": (3 pt.)

$x(t) =$ t

$y(t) =$ $2t$

$z(t) =$ $-t$

3. Si trovi la soluzione $barY(t)$ di (Sys) verificante le condizioni iniziali $\bar{x}(0) = -1$, $\bar{y}(0) = 0$, $\bar{z}(0) = 1$: (4 pt.)

$\bar{x}(t) =$ $(t-1)e^t + t$

$\bar{y}(t) =$ $te^t + 2t$

$\bar{z}(t) =$ $(\frac{t^2}{2}+1)e^t - t$

Fine Test

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ • pol. caratt.

$$\to p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda) + (1-\lambda) =$$

$$(1-\lambda)(-2\lambda + \lambda^2 + 1) = (1-\lambda)^3 \Rightarrow$$ UN SOLO AUTOVALORE $\boxed{\lambda = 1}$

• $B := A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 2 $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B = 1$

det $\neq 0$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B^2 = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} B^3 = 3 \Rightarrow \boxed{m_G(1) = 1}$

• Calcolo B^2 (per dopo)

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Cerco e_3 tale che $B^2 e_3 \neq 0$. Se $e_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ allora

$B e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x+y \end{bmatrix}$ dunque $x \neq y$. Posso prendere $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

oppure (torna meglio con l'ultima domanda) $e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Con questa seconda scelta ho

$e_2 = B e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e_1 = B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

se $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = M J M^{-1}$

• Cerco $Y(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} t \Rightarrow Y' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ da cui la condizione

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

QUESTA CONDIZIONE IMPLICA

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dunque $a=1$ $b=2$ $c=-1$ e la sol esiste se e solo se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \underline{\text{SI VEDE CHE TORNA}}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

- Cerco la Y del tipo $Y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + Y_0(t)$

dove Y_0 risolve l'omogenea e $Y_0(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(= e_3 !)$

(dato che il primo addendo fa zero se $t=0$). Per la formula risolutiva

$$Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} e_3 = M \cdot e^{tJ} \hat{e}_3 \quad \left(\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= M e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^t \begin{bmatrix} t-1 \\ t \\ t^2/2 + 1 \end{bmatrix}$$