Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 1 luglio 2022

COGNOME:

NOME:

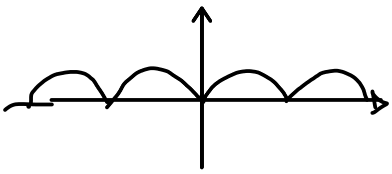
MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40. Il tempo a disposizione è 2 ore

Inizio Test

**1.** (8 p.) Si consideri la funzione $f(t) = \sin(t)$ definita per $0 \leq t \leq \pi$ ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo $\pi$-periodico.

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta: (1 pt.)
   (a) $f$ è pari;
   (b) $f$ è dispari;
   (b) $f$ non è né pari né dispari;



2. Si calcolino i coefficienti complessi $c_n$ dello sviluppo di Fourier di $f$ (come funzione $\pi$-periodica): (4 pt.)

$$c_n = \frac{2}{(1-4n^2)\pi}.$$

Può far comodo ricordare che $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

3. Si dica se la serie di Fourier di cui la punto precedente converge uniformemente a $f$: (1 pt.)
   vero falso $\qquad \sum |c_n| < +\infty$

4. Usando quanto visto nei punti precedenti si trovi la somma della serie: (2 pt.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

- $$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\, e^{-2nit}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\pi \left(e^{(-2n+1)it} - e^{(-2n-1)it}\right) dt = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{(-2n+1)it}}{(-2n+1)i} + - \frac{e^{(-2n-1)it}}{(-2n-1)i}\right]_0^\pi = \frac{-1}{2\pi}\left(\frac{e^{(-2n+1)i\pi} - 1}{-2n+1} - \frac{e^{(-2n-1)i\pi} - 1}{-2n-1}\right) = -\frac{1}{2\pi}(-2)\frac{-2n-1+2n-1}{4n^2-1}$$

$(-1)$

$$= \frac{-2}{(4n^2-1)\pi}$$ ( $c_n$ è reale pari $\Leftrightarrow$ $f$ è pari !! )

- $$0 = f(0) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1-4n^2} e^{2int}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} \Rightarrow \sum \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

$n=0$ $\quad$ tengo conto degli $n<0$

**2.** (6 p.) Si consideri la seguente serie di potenze:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$$

(è sottinteso che $f(x)$ esiste per le $x$ in cui il termine di destra è una serie convergente).

1. Si scriva l'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ delle $x$ per cui la serie converge: (1 pt.)

   $I = \boxed{[-1, 1]}$

   (in linea di principio $I$ potrebbe essere anche un singolo punto).

2. Si trovi la derivata terza di $f$ in $x = 0$ oppure si scriva "N.E." (non esiste): (2 pt.)

   $f'''(0) = \boxed{\dfrac{3}{5}}$.

3. Si trovi l'espressione esplicita di $x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x)$ per $x$ nella parte interna di $I$ (dove sappiamo che $f$ è infinitamente derivabile): (3 pt.)

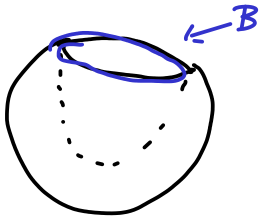
   $x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = \boxed{\dfrac{1}{1-x}}$

- Il raggio è 1 perché $\sqrt[n]{n^2+1} \to 1$. Nei punti $\pm 1$ vedo che le serie $\sum \frac{(\pm 1)^n}{1+n^2}$ convergono (assolutamente).
- $f'''(0) = 3!\, a_3 = 6 \cdot \frac{1}{1+3^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
- $x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = x^2 \sum \frac{n(n-1)}{1+n^2} x^{n-2} + x \sum \frac{n x^{n-1}}{1+n^2} + \sum \frac{x^n}{1+n^2} =$

$$\sum \frac{n^2 - n + n + 1}{1+n^2} x^n = \sum x^n = \frac{1}{1-x} \quad (\text{serie geometrica})$$

**3.** (10 p.) Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 4, z \le \sqrt{2}(x^2+y^2-1)\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4, z \le \sqrt{2}\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{2}(x^2+y^2-1), z \le \sqrt{2}\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 2, z = \sqrt{2}\}$$




e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$$

Se $P \in \partial_{reg} D$ (frontiera regolare di $D$) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a $\partial D$ uscente da $D$, nel punto $P$.

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta. (1 pt.)

   a $\quad B \subset \Sigma(\partial D)$, ma $B \neq \Sigma(\partial D)$;

   b $\quad B = \Sigma(\partial D) \neq \Sigma^*(\partial D)$;;

   ~~c~~ $\quad B = \Sigma^*(\partial D) \neq \Sigma(\partial D)$;

   d $\quad B \supset \Sigma^*(\partial D)$, ma $B \neq \Sigma^*(\partial D)$;

   e $\quad$ nessuna delle precedenti.

2. Si calcoli: (1 pt.) $\hat{\nu}(0,0,-\sqrt{2}) = \boxed{0}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{1}\,\vec{\mathbf{k}}$ / non esiste;

3. Si calcoli: (1 pt.)

   $\hat{\nu}(1,1,-\sqrt{2}) = \boxed{\frac{1}{2}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{\frac{1}{2}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\vec{\mathbf{k}}$ / non esiste;

4. Si dica se $\vec{f}$ è conservativo: ~~vero~~ falso. ($\vec{f}$ è radiale) (1 pt.)

5. Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale: ~~vero~~ falso. (vedo che $\operatorname{div} \vec{f} = 0$) (1 pt.)

6. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (3 pt.)

   $$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = 4\pi(2+\sqrt{2}).$$

7. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (2 pt.)

   $$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \left(= -\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})\right) = -4\pi(2+\sqrt{2}).$$

$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_S \frac{1}{4}\, d\sigma$ perché $\vec{f}(x,y,z) = \frac{\hat{\nu}(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$

$\Rightarrow \hat{f}\cdot\hat{\nu} = \frac{1}{4}$ su $S$. Dunque $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \frac{1}{4}\,\text{Area}(S)$. Uso le coord sferich

$x = 2\cos\theta\sin\psi \quad y = 2\sin\theta\sin\psi \quad z = 2\cos\psi \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \quad \frac{\pi}{4} \le \psi \le \pi$. Ho $d\sigma = 4\sin\psi\, d\theta\, d\psi$

$\Rightarrow \text{Area}(S) = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi} \sin\psi\, d\psi = 4\cdot 2\pi\cdot[-\cos\psi]_{\pi/4}^{\pi} = 8\pi\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\pi(2+\sqrt{2})$

**4.** (10 p.) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + 2e^{3xy-6}$$

Sia inoltre

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2 + y^2 = 4\}.$$

1. Si trovino tutti i punti stazionari di $f$ e per ognuno si dica si si tratta di massimi relativi, minimi relativi o altro. (le caselle di risposta possono essere più di quelle necessarie) (4 pt.)

$(x, y) =$ (0, 0) punto di SELLA

$(x, y) =$ (1, −2) punto di MINIMO

$(x, y) =$ (−1, 2) punto di MINIMO

$(x, y) =$ ______ punto di ______

$(x, y) =$ ______ punto di ______

2. Si calcolino (oppure si scriva “non esiste”): (3 pt.)

$$\min_{(x,y)\in M} xy = -1 \quad , \quad \max_{(x,y)\in M} xy = 1 .$$

3. Si calcolino (oppure si scriva “non esiste”): (3 pt.)

$$\min_{(x,y)\in M} f(x, y) = 6 + 2e^3 \quad , \quad \max_{(x,y)\in M} f(x, y) = 2 + e^9 .$$

(potrebbe essere utile la risposta data nel punto precedente).

$$f(x,y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + 2e^{3xy+6}$$

$$D_x f = 8x - 2y + 6y e^{3xy+6} \qquad D_y f = -2x + 2y + 6x e^{3xy+6}$$

$$D_{xx} f = 8 + 18 y^2 e^{3xy+6}$$

$$D_{xy} f = -2 + 6e^{3xy+6} + 18xy e^{3xy-6} = -2 + 6(1+3xy) e^{3xy+6}$$

$$D_{yy} f = 2 + 18x^2 e^{3xy+6}$$

PTI CRITICI: $\begin{cases} 4x + (3e^{3xy+6} - 1)y = 0 \\ (3e^{3xy+6} - 1)x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$ o $(x,y) = (0,0)$ o il det. della matrice $= 0$

cioè $4 = (3e^{3xy+6} - 1)^2 = 0 \iff 3e^{3xy+6} - 1 = \pm 2$. Ma $-2$ dovrebbe $3e^{3xy+6} = -1$ IMPOSSIBILE. L'altra condizione equivale a

$3e^{3xy+6} = 3 \iff e^{3xy+6} = 1 \iff 3xy = -6 \iff \boxed{xy = -2}$

DUNQUE o $(x,y) = (0,0)$ oppure

$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ xy = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow$ TROVO $\pm(1,-2)$

• Calcolo gli Hessiani:

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & -2+6e^6 \\ -2+6e^6 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow$ HA Det $< 0$ SELLA

$Hf(1,-2) = \begin{bmatrix} 8+18\cdot 4 & -2+6(1+6) \\ -2+6(1+6) & 2+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 20 \end{bmatrix}$

VIENE DET $= 0$. dato che $a_{11} > 0$ $a_{22} > 0$ $H_f(1,-2) \geq 0$.

Non posso dire che $(1,-2)$ è di minimo da questo PERÒ vedo che $f(x,y) \geq 4x^2 - 2xy + y^2$ che è definita positiva ($\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > 0$). Dunque $f(x,y) \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to \infty \Rightarrow f$ ha minimo assoluto e allora i punti di minimo devono essere $\pm(1,-2)$ (in essi $f$ è uguale)

• Se $g(x,y) = xy$ e voglio pti critici di $g$ su $V \Rightarrow \nabla g = \lambda \nabla(4x^2+y^2)$

$\iff \begin{cases} y = \lambda \cdot 8x \\ x = \lambda \cdot 2y \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda \neq 0 \ (\text{se no } x=y=0) \\ xy = 8\lambda x^2 \\ xy = 2\lambda y^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 8x^2 = 2y^2 \\ \Updownarrow \\ y = \pm 2x \end{array}$ Allora deve essere

$\begin{cases} y = \pm 2x \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 2x \\ 8x^2 = 4 \end{cases}$ $(x,y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{2}\right)$ (QUATTRO PTI)

Se calcolo $xy$ su $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ trovo $\pm 1$.

- Dato che $V = \{4x^2 + y^2 = 4\}$ e che su $V$ $xy$ sono tra $-1$ e $1$ posso porre $t = xy$ e cercare

$$\max_{-1 \le t \le 1} 4 - 2t + 2e^{3t+6} \qquad (\text{e } \min\ldots)$$

Allora $\frac{d}{dt} \underbrace{4 - 2t + 2e^{3t+6}}_{\varphi(t)} = -2 + 6e^{3t+6} = 0 \iff e^{3t+6} = \frac{1}{3}$

$\iff 3t + 6 = -\ln(3) \iff t = -2 - \ln(3)$. Ma $-2 - \ln(3) < -1$

dunque non ci sono punti stazionari tra $-1$ e $1$. Devo guardare $t = \pm 1$. $\varphi(1) = 2 + e^9$ $\quad \varphi(-1) = 6 + 2e^3$

Si ha $2 + e^9 > 6 + 2e^3 \iff e^9 - 2e^3 > 4 \Leftarrow 2^9 - 2 \cdot 3^3 > 4$

$\iff 512 - 54 > 4$ vero. $\Rightarrow \max = 2 + e^9 \quad \min = 6 + 2e^3$

**5.** (6 p.) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x + y - e^t \\ y' = x - y + e^t \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad , \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B(t) := \begin{bmatrix} -e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di $A$ e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (1 pt.)

$$\lambda_1 = \boxed{\sqrt{2}} \qquad m_A(\lambda_1) = \boxed{1} \qquad m_G(\lambda_1) = \boxed{1};$$

$$\lambda_2 = \boxed{-\sqrt{2}} \qquad m_A(\lambda_2) = \boxed{1} \qquad m_G(\lambda_2) = \boxed{1};$$

2. Si trovi una soluzione di (Sys) del tipo $Y(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t$ con $a, b \in \mathbb{R}$ (da trovare), oppure si scriva "non esiste" (2 pt.)

$$Y(t) = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t}$$

3. Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) con condizione iniziale nulla: (3 pt.)

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(cioé $x(0) = 0$, $y(0) = 0$).

$$Y_0(t) = \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}+1}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} e^{-\sqrt{2}t} \\ -\cdot\frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}-t} \end{bmatrix}.}$$

Fine Test

- $p(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2 \Rightarrow$ autovalori $\pm\sqrt{2}$
- Impongo $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \iff \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff b = 1 \quad a = 1$
- Posso cercare $Y(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + Y_0(t)$ con $Y_0' = AY_0$
  Risulta $Y_0(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

TROVIAMO DEGLI AUTOVETTORI :

$\lambda = \sqrt{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

per esempio $x = 1 \quad y = \sqrt{2} - 1$.

$\lambda = -\sqrt{2}$ basta prendere un vettore ortogonale al precedente (A simm.)

$$x = \sqrt{2} - 1 \qquad y = -1$$

Allora

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}-4}\begin{bmatrix} -1 & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}}_{M^{-1}}$$

$M e^{tD} M^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow Y_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}-4} M \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -2+\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{2\sqrt{2}+4}{8-16} M \begin{bmatrix} \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-2)\, e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{\sqrt{2}+2}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-2)e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}+2}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} + (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}-2)e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}+1}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} e^{-\sqrt{2}t} \\ -\frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} \end{bmatrix}$$