Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 10 giugno 2022

COGNOME:

NOME:

MATR.:

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40. Il tempo a disposizione è 2 ore

Inizio Test

1. (8 p.) Consideriamo la seguente equazione differenziale lineare:

$$x(x+1)y'' + (x-3)y' - 9y = 3x^2 \tag{E}$$

Cerchiamo soluzioni sviluppabili in serie di potenze vicino a zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Si trovi una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n: (2 pt.)

$$\left[a_{n+1}(n+1) + a_n(n+3)\right](n-3) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ 3 & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

OPPURE

$$a_{n+1} = -\frac{n+3}{n+1} a_n \quad \text{se } n \geq 4$$

$$a_1 = -3a_0, \quad a_2 = 6a_0, \quad a_3 = -1 - 10a_0$$

2. Se aggiungiamo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 0,\ y'(0) = 0}$, allora: (1 pt.)

   a) esiste una e una sola soluzione di (E) con tali condizioni;

   ~~b)~~ esiste una soluzione di (E) con tali condizioni, ma non è unica;

   c) non esiste nessuna soluzione di (E) con tali condizioni.

3. Se aggiungiamo le condizioni iniziali $\boxed{y(0) = 0,\ y^{(4)}(0) = 0}$, allora: (1 pt.)

   ~~a)~~ esiste una e una sola soluzione di (E) con tali condizioni;

   b) esiste una soluzione di (E) con tali condizioni, ma non è unica;

   c) non esiste nessuna soluzione di (E) con tali condizioni.

4. Indichiamo con $\bar{y}$ la soluzione di (E) verificante $\bar{y}(0) = 0$, $\bar{y}^{(4)}(0) = 24$ (ammesso che esista e sia unica– altrimenti si barrino le caselle corrispondenti). Si trovi: (2 pt.)

   $\bar{y}^{(5)}(0) = \boxed{-168}$ / $\bar{y}$ non esiste / $\bar{y}$ non è unica

5. Si trovi la soluzione $\tilde{y}$ di (E) verificante $\tilde{y}(0) = 1$, $\tilde{y}^{(4)}(0) = 0$ (ammesso che esista e sia unica– altrimenti si barrino le caselle corrispondenti). (2 pt.)

   $\tilde{y}(x) = \boxed{1 - 3x + 6x^2 - 11x^3}$

   / $\tilde{y}$ non esiste / $\tilde{y}$ non è unica

1 | Se $y(x)=\sum_n a_n x^n \Rightarrow y'(x)=\sum_n a_n n x^{n-1} = \sum_n a_{n+1}(n+1)x^n$

$$y''(x)=\sum_n a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_n a_{n+1}(n+1)n\, x^{n-1}$$

Ne segue che $x(x+1)y''+(x-3)y'-9y =$

$$\sum_n \{a_n n(n-1) + a_{n+1}(n+1)n + a_n n - a_{n+1}3(n+1) - a_n 9\} x^n =$$

$$\sum_n \{a_{n+1}(n+1)(n-3) + a_n(n^2-9)\} x^n = \sum_n [a_{n+1}(n+1)+a_n(n+3)](n-3)x^n$$

Se questo deve fare $3x^2$ otteniamo

$$(R) \qquad [a_{n+1}(n+1)+a_n(n+3)](n-3) = \begin{cases} 0 & \text{se } n\neq 2 \\ 3 & \text{se } n=2\end{cases}$$

VOLENDO SI POSSONO TRATTARE A PARTE I CASI $n=3$ / $n=2$

Dato che se $n=3$ trovo $0=0$ il caso $n=3$ non dà nessuna condizione. Se invece $n=2$ trovo $-(3a_3+5a_2)=3$ DUNQUE

$$(R)' \quad \begin{cases} a_{n+1} = -\frac{(n+3)}{n+1}a_n & \text{se } n<2 \text{ o } n>3 \\ a_3 = -1-\frac{5}{3}a_2 \end{cases}$$

Volendo posso considerare $n=0$ e $n=1$ $\Rightarrow$

$(n=0)$ $a_1=-3a_0$ $\quad (n=1)$ $\left(a_2 = -\frac{4}{2}a_1 = 6a_0\right)$ e allora

$$(R)'' \quad \begin{cases} a_{n+1} = -\frac{n+3}{n+1}a_n \quad \text{se } n\geq 4 & (a_4 \text{ È LIBERO}) \\ a_1=-3a_0, \; a_2=6a_0, \; a_3=-1-10a_0 & (a_0 \text{ È LIBERO}) \end{cases}$$

DUNQUE $y(x)$ esiste unica se fisso $a_0=y(0)$ e $a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{24}$

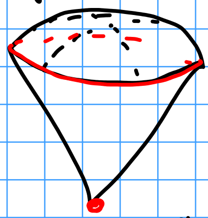
Nella domanda (2) abbiamo $a_0=0$ e da (R) segue $a_1=0$ che va d'accordo con $y'(0)=0$. DUNQUE LA SOL. ESISTE. PERO' NON E' UNICA DATO CHE POSSO PRENDERE a_4 COME VOGLIO

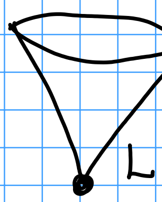
$a_0=0,\; a_4=0 \Rightarrow y(x)=-x^3$ che è UNICA (domanda (3))

Nella (4) $f^{(4)}(0)=24 \iff a_4=1 \Rightarrow a_5=-\frac{7}{5}$ (per R) $\Rightarrow f^{(5)}(0)=5!\,a_5=-5!\,\frac{7}{5}=-24\cdot 7=-168$

Nella domanda (5) ho $a_0=1$ e $a_4=0$ che USANDO (R) mi dà $a_1=-3$ $a_2=6$ $a_3=-11$

$\boxed{2}$ D è l'intersezione della palla $\{x^2+y^2+z^2\le 4\}$ con la "parte positiva" del cono $\{z^2\ge x^2+y^2\}$ (cioè con $z\ge 0$)

$D=$ 



La frontiera di D è

$$\partial D=\{x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}\cup\{x^2+y^2+z^2\le 4,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\}=$$

$$\{x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}\cup\{x^2+y^2\le 2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\}=S\cup L=$$

$$\{x^2+y^2+z^2=4,\ z>\sqrt{x^2+y^2}\}\cup\{x^2+y^2+z^2<2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\}\cup\underbrace{\{x^2+y^2=2,\ z=\sqrt{2}\}}_{B}$$

1) Dato che la funzione $z-\sqrt{x^2+y^2}$ NON è C^1 IN $(0,0,0)$ il punto $(0,0,0)$ NON È REGOLARE e non è nel bordo di L (come si vede dal disegno)

2) Per quanto detto in 1) la frontiera regolare NON CONTIENE $(0,0,0)$ (e non contiene B) DUNQUE LA RISPOSTA CORRETTA È $\boxed{\text{FALSO}}$

IN EFFETTI $\partial D\setminus\partial_{reg}D=B\cup\{(0,0,0)\}$

3) IL PUNTO $P=(-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ 1)\in L$ e non in S (e non è $(0,0,0)$)

DUNQUE $\hat{\nu}(P)=\dfrac{\nabla G_2(P)}{\|\nabla G_2(P)\|}$ dove $G_2=\sqrt{x^2+y^2}-z$

$$\Rightarrow \nabla G_2=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -1\end{pmatrix} \text{ che in } P \text{ vale } \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ -1\end{pmatrix}.$$

DATO CHE $\|\nabla G_2(P)\|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=2 \Rightarrow \hat{\nu}(P)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\ 1/2\\ -\sqrt{2}/2\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}-\sqrt{2}\,\vec{k}\right)$

4) IL PUNTO $(-1,1,\sqrt{2})\in B=S\cap L \Rightarrow$ NON ESISTE LA NORMALE

2. (14 p.) Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 2, z = \sqrt{x^2+y^2}\}$$
$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 2, z = \sqrt{2}\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := zx^2y^2(-y\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}})$$

Se $P \in \partial_{reg}D$ (frontiera regolare di D) indichiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria a ∂D uscente da D, nel punto P.

1. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta. (1 p.)

   a $(0,0,0) \in \Sigma(L)$;

   ~~b~~ $(0,0,0) \notin \Sigma(L)$, ma $(0,0,0) \in \Sigma^*(L)$;

   c $(0,0,0) \notin \Sigma^*(L)$, ma $(0,0,0) \in L$;

   d $(0,0,0) \notin L$.

2. Si dica se $\partial D \setminus \partial_{reg}D = B$: vero ~~falso~~.

3. Si calcoli: (1 pt.)

   $\hat{\nu}(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1) =$ $-1/2$ $\vec{\mathbf{i}}+$ $1/2$ $\vec{\mathbf{j}}+$ $-\sqrt{2}/2$ $\vec{\mathbf{k}}$/ non esiste;

4. Si calcoli: (1 pt.)

   $\hat{\nu}(-1, 1, \sqrt{2}) =$ $\vec{\mathbf{i}}+$ $\vec{\mathbf{j}}+$ $\vec{\mathbf{k}}$/ ~~non esiste~~;

5. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (3 pt.)

   $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) =$ 0.

6. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(L, \hat{\nu})$: (3 pt.)

   $\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) =$ 0.

7. Si calcoli il flusso di rot$\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$: (4 pt.)

   $\Phi(\mathrm{rot}\vec{f}, S, \hat{\nu}) =$ $2\sqrt{2}\pi$.

5) Noto che su S è normale è

$$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

Se faccio $\vec{f}\cdot\hat{\nu}$ trovo $\frac{2x^2y^2}{2}\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right)\cdot\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right) = \underline{\underline{0}}$

Per cui il flusso di $\vec{f}$ su S è ZERO

6) Uso il teorema della divergenza per calcolare $\Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu})$.

div $\vec{f} = -2zxy^3 + 2zx^3y$. Allora

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{f} = \iiint_D 2xyz(x^2-y^2)\,dx\,dy\,dz = \quad \text{(coord. sferiche)}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 2\sin\theta\cos\theta\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\sin^4\varphi\cos\varphi\,\rho^5\rho^2\sin\varphi\,d\rho =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\cos(2\theta)\,d\theta}\int_0^{\pi/4}\sin^5\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^2\rho^7\,d\rho = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 4\theta\,d\theta = \left[-\frac{1}{8}\cos(4\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

DUNQUE (per differenza) anche $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = 0$

(7) Si può usare STOKES e calcolare l'integrale curvilineo di $\vec{f}$ su B (con verso concorde con $\hat{\nu}$). Posso descrivere B come sostegno della curva $\gamma(t) = \sqrt{2}\left(\cos(t)\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k}\right)$ che ha derivata $\gamma'(t) = \sqrt{2}\left(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\right)$.

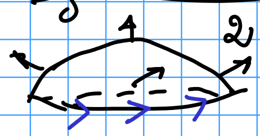
Allora

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi}\vec{f}\left(\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\sin(t)\vec{i} + \sqrt{2}\cos(t)\vec{j}\right)dt$$

$$\int_0^{2\pi}\underset{2}{\sqrt{2}}\cdot 2\underbrace{\sin^2(t)}_{x^2}\cdot 2\underbrace{\cos^2(t)}_{y^2}\underbrace{\left(-\sqrt{2}\sin(t)\vec{i}+\sqrt{2}\cos(t)\vec{j}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\sin(t)\vec{i} + \sqrt{2}\cos(t)\vec{j}\right)}_{=2}dt$$

$$2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sin(2t)^2\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{2}\,dt = 2\sqrt{2}\,\pi$$

NOTIAMO CHE $\gamma(t)$ è coerente con $\hat{\nu}$:



OPPURE (PIÙ COMPLICATO) Posso calcolare

$$\vec g = \text{rot}\,\vec f = \det\begin{bmatrix}\vec i & D_x & -x^2y^3z\\ \vec j & D_y & x^3y^2z \\ \vec k & D_z & 0\end{bmatrix} = \vec i\,(-x^3y^2) - \vec j\,(x^2y^3) + \vec k\,(3x^2y^2 - (-3x^2y^2)) =$$

$$x^2y^2(-x\,\vec i - y\,\vec j + 6z\,\vec k).$$

Per integrare $\vec g$ su S devo parametrizzare S: uso

$$\Gamma(\varphi,\theta) = 2\cos\theta\sin\varphi\,\vec i + 2\sin\theta\sin\varphi\,\vec j + 2\cos\varphi\,\vec k \qquad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec N_\Gamma(\varphi,\theta) = 4\sin\varphi\,(\cos\theta\sin\varphi\,\vec i + \sin\theta\sin\varphi\,\vec j + \cos\varphi\,\vec k)$$

da cui:

$$\iint_S \vec g\cdot\hat\nu\,d\sigma = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\,16\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^4\varphi\cdot 4\sin\varphi$$
$$\left(-2\cos\theta\sin\varphi\,\vec i - 2\sin\theta\sin\varphi\,\vec j + 12\cos\varphi\,\vec k\right)\left(\cos\theta\sin\varphi\,\vec i+\sin\theta\sin\varphi\,\vec j+\cos\theta\,\vec k\right)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 128\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^5\varphi\cdot(-\sin^2\varphi + 6\cos^2\varphi)\,d\theta\,d\varphi =$$

$$32\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta \int_0^{\pi/4}(-\sin^2\varphi+6\cos^2\varphi)\sin^5\varphi\,d\varphi =$$

$$32\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos4\theta}{2}\,d\theta\int_0^{\pi/4}(-1+7\cos^2\varphi)(1-\cos^2\varphi)^2\sin\varphi\,d\varphi =$$

$t=\cos\varphi \qquad dt = -\sin\varphi\,d\varphi$

$$32\pi\int_{\sqrt2/2}^1 (7t^2-1)(1-t^2)^2\,dt = 32\pi\int_{\sqrt2/2}^1(7t^2-1)(1-2t^2+t^4)\,dt =$$

$$32\pi\int_{\sqrt2/2}^1(7t^6-15t^4+9t^2-1)\,dt = 32\pi\left[t^7-3t^5+3t^3-t\right]_{\sqrt2/2}^1 =$$

$$32\pi\left[\cancel{1}-\cancel{3}+\cancel{3}-\cancel{1} - \frac{\sqrt2}{2}\left(\frac18-\frac34+\frac32-1\right)\right] = 16\sqrt2\pi\left(\frac{1-6+12-8}{8}\right) = 2\sqrt2\,\pi$$

SI PUÒ ANCHE NOTARE CHE (essendo $\text{div}\,\vec g = \text{div}\,\text{rot}\,\vec f = 0$) allora

$$\iint_S \vec g\cdot\hat\nu\,d\sigma = \iint_B \vec g\cdot\hat\nu\,d\sigma \quad \text{dove} \quad B=\{x^2+y^2\le2 \ \ z=\sqrt2\} \ \text{con}\ \hat\nu=\vec k$$

Allora

$$\iint_B \vec g\cdot\hat\nu\,d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le2} g_3(x,y,\sqrt2)\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le2}6\sqrt2\,x^2y^2\,dx\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt2}6\sqrt2\,(\rho\cos\theta)^2(\rho\sin\theta)^2\rho\,d\rho = 6\sqrt2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\int_0^{\sqrt2}\rho^5\,d\rho =$$

$$\frac32\sqrt2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt2} = \frac32\sqrt2\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta}_{=\pi}\ \frac{2^3}{6} = 2\sqrt2\,\pi$$

3. (10 p.) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2e^{2xy-1}$$

Sia inoltre

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0, y > 0, 1 \leq xy \leq 4\}.$$

1. Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno si dica si si tratta di massimi relativi, minimi relativi o altro. (le caselle di risposta possono essere più di quelle necessarie) (4 pt.)

$(x, y) =$ $\boxed{(0,0)}$ punto di MINIMO

$(x, y) =$ $\boxed{(1, 1/2)}$ punto di SELLA

$(x, y) =$ $\boxed{(-1, -1/2)}$ punto di SELLA

$(x, y) =$ $\boxed{}$ punto di ____

$(x, y) =$ $\boxed{}$ punto di ____

2. Si calcoli: (2 pt.)

$$\lim_{(x,y)\in D, \|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) = \boxed{+\infty} \,/\, \boxed{\text{non esiste}}.$$

3. Si calcoli: (4 pt.)

$$\min_D f = \boxed{16 - 2e^7} \,/\, \boxed{\text{non esiste}}.$$

3) $f(x,y) = x^2+4y^2 - 2e^{2xy-1}$

$\frac{\partial}{\partial x} f = 2x - 4y e^{2xy-1}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 8y - 4x e^{2xy-1}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 8y^2 e^{2xy-1}$ $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 8 - 8x^2 e^{2xy-1}$

$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -4e^{2xy-1} - 8xy\, e^{2xy-1} = -4(1+2xy)e^{2xy-1}$

Se cerco i pti stazionari:

$\begin{cases} 2x = 4y\, e^{2xy-1} \\ 8y = 4x e^{2xy-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y\, e^{2xy-1} \\ 2y = x\, e^{2xy-1} \end{cases} \Rightarrow x = x e^{2xy-1} \cdot e^{2xy-1}$

$\Updownarrow$

$x=0$ oppure $\left(e^{2xy-1}\right)^2 = 1$

Se $x=0$ trovo $y=0$ da cui il punto $(0,0)$

Se $\left(e^{2xy-1}\right)^2 = 1$ ho $e^{2xy-1} = 1$ (-1 NON VA BENE) $\iff$ $2xy = 1$. Allora ho

$\begin{cases} 2x = 4y \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 = 1 \end{cases} \iff$ $y = \pm 1/2$ $x = 2y$ da cui i punti $\pm\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Se calcolo gli Hessiani

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -4/e \\ -4/e & 8 \end{bmatrix}$ ho $a_{11} > 0$ e $\det = 16 - \frac{16}{e^2} > 0$

$(0,0)$ pto di minimo

$H_f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ SELLA. Lo stesso in $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

---

(2) se mi metto su D e^{2xy-1} è compreso da e e e^7

dunque è limitato. QUINDI se $(x,y) \in D$

$f(x,y) \geq x^2 + 4y^2 - 2e^7 \geq \|(x,y)\|^2 - 2e^7$

$f(x,y) \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$, $(x,y) \in D$

(3) Per Weierstr. generalizzato f ha minimo su D. Questo mini

more nei punti stazionari (che non sono in D) devo ... dop

esser alla frontiera. Devo usare: moltiplicatori

Dato che $\partial D = \{(x,y) \in D : xy = 1\} \cup \{(x,y) \in D : xy = 4$ ho

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda x \\ xy = 1 \ / \ xy = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 4y e^{2xy-1} = \lambda y \\ 8y - 4x e^{2xy-1} = \lambda x \\ xy = 1 \ / \ xy = 4 \end{cases}$$

Se $xy = 1$
$$\begin{cases} 2x = (\lambda + 4e) y \\ 8y = (\lambda + 4e) x \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{(\lambda + 4e)^2}{8} x$$

$\Updownarrow$

$x = 0$ (IMPOSSIBILE) oppure

$(\lambda + 4e)^2 = 16 \iff$

$\lambda + 4e = \pm 4$

$$\begin{cases} 2x = \pm 4y \\ xy = 1 \end{cases}$$

– è impossibile perché $x>0$ $y>0$

$$\begin{cases} x = 2y \\ xy = 1 \end{cases} \iff \quad y = \sqrt{2}/2 \quad x = \sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2) = 2 + \frac{4}{2} - 2e = 4 - 2e$$

Se considero $xy = 4$, stessi calcoli

$$\begin{cases} 2x = (\lambda + 4e^7) y \\ 8y = (\lambda + 4e^7) x \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{(\lambda + 4e^7)}{8} x$$

$\Updownarrow$

$x = 0$ (IMPOSSIBILE) oppure (–4 IMPOSS)

$(\lambda + 4e^7)^2 = 16 \iff \lambda + 4e^7 = 4$

$$\begin{cases} x = 2y \\ xy = 4 \end{cases} \quad y = \sqrt{2} \quad x = 2\sqrt{2}$$

$$f(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8 + 4 \cdot 2 - 2e^7 = 16 - 2e^7$$

SI HA $16 - 2e^7 < 4 - 2e \iff 6 < e^7 - e$

$6 + e < e^7$ VERO PERCHÉ $2 < e < 3$ e $6 + 3 < 2^7$

DUNQUE IL MINIMO È $\boxed{16 - 2e^7}$

4. (8 p.) Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -z + e^t \\ y' = 2x - y - z - 2e^t \\ z' = x - 2z - e^t \end{cases} \tag{Sys}$$

che si può scrivere in forma vettoriale come

$$Y' = AY + B(t)$$

dove:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \qquad A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} e^t \\ -2e^t \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

1. Si trovino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica: (2 pt.)

$\lambda_1 =$	-1	$m_A(\lambda_1) =$	3	$m_G(\lambda_1) =$	1 ;
$\lambda_2 =$		$m_A(\lambda_2) =$		$m_G(\lambda_2) =$	;
$\lambda_3 =$		$m_A(\lambda_3) =$		$m_G(\lambda_3) =$	

(non occorre riempire tutte le caselle se gli autovalori sono uno o due).

2. Si indichi quali tra le seguenti $Y(t)$ sono soluzioni di (Sys) (anche più di una). (3 pt.)

- [x] A $x(t) = e^t,\ y(t) = 0,\ z(t) = 0$;
- [ ] B $x(t) = 0,\ y(t) = e^t,\ z(t) = 0$;
- [ ] C $x(t) = 0,\ y(t) = 0,\ z(t) = e^t$;
- [x] D $x(t) = e^t,\ y(t) = e^{-t},\ z(t) = 0$;;
- [ ] E $x(t) = e^t,\ y(t) = 0,\ z(t) = e^{-t}$;
- [ ] F nessuna di queste.

3. Si trovi la soluzione $Y_0(t)$ del problema omogeneo: (3 pt.)

$$Y_0' = AY_0, \qquad Y_0(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(cioé $x(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = 0$).

$Y_0(t) =$
$x(t) = 0$
$y(t) = e^{-t}$
$z(t) = 0$

$\left(Y_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Fine Test

4 (1) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A :

$$p(\lambda) := \det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2) + -(\lambda+1) =$$

$$-(\lambda+1)\left[\lambda(\lambda+2)+1\right] = -(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(\lambda+1)^3$$

$\Rightarrow$ UN SOLO AUTOVALORE $\lambda = -1$ con $m_A = 3$.

TROVO $B = A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ vedo che ha rango 2 $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} B = m_G(-1) = 1$

2 Proviamo a vedere, uno per uno, se le $Y(t)$ verificano (Sys).

(a) $x'(t)+z(t) = e^t - 0 = e^t$ ok

$y'(t)-2x(t)+y(t)+z(t) = 0 - 2e^t + 0 + 0 = -2e^t$ ok

$z'(t)-x(t)+2z(t) = 0 - e^t + 2\cdot 0 = e^t$ ok

(b) $x'(t)+z(t) = 0 + 0$ NON TORNA

(c) $x'(t)+z(t) = 0 + e^t = e^t$ ok

$y(t) - 2x(t)+y(t)+z(t) = 0 - 2\cdot 0 + 0 + e^t$ NON TORNA

(d) $x'(t)+z(t) = e^t + 0 = e^t$ ok

$y'(t)-2x(t)+y(t)+z(t) = -e^{-t} - 2e^t + e^{-t} + 0 = -2e^t$ ok

$z'(t)-x(t)+2z(t) = 0 - e^t + 2\cdot 0 = -e^t$ ok

(e) $x'(t)+z(t) = e^t + e^{-t}$ NON TORNA

(3) Il modo più veloce è di notare che posto

$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ allora Y_1 e Y_2 sono soluzioni di (Sys) (caso (a) e caso (d) del punto 2)

Allora $Y_0 := Y_2 - Y_1$ è soluzione dell'omogenea e

$$Y_0(0) = Y_2(0) - Y_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Volendo a più usare la formula risolutiva, trovando la forma di Jordan per A

Abbiamo

$$B = A + I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \qquad\qquad -3+6-1$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$. Posso prendere $e_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$e_2 := B e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_1 := B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{questo è } Y_0(0)$$

Allora $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$Y_0(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0(0) = e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{M^{-1} Y_0(0)}_{= \hat{e}_1} =$$

perché $M \hat{e}_1 = e_1 = Y_0(0)$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$