NOME: [ ] COGNOME: [ ] MATR.: [ ]

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 13 gennaio 2022

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 45 minuti)

Inizio Test

1. Si consideri la serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{1+n^2}$$

1. Si calcoli il raggio di convergenza R della serie.
2. Si dica quale dei seguenti intervalli coincide con l'insieme su cui la serie converge puntualmente.
   (a) $]-R, R[$;
   (b) $[-R, R[$;
   (c) $]-R, R]$;
   (d) $[-R, R]$.
3. Si dica se la serie converge uniformemente su $]-R, R]$.
4. Indichiamo con $f(x)$ la somma della serie (per le x per cui la serie converge). Si trovi $f''(0)$.

(1) $R = \frac{1}{L}$ dove

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \frac{1}{\sqrt[n]{1+1/n^2}} =$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+1/n^2}} = \left(\frac{1}{1}\right)^2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow L = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 1$$

(2) e (3) Se $|x| \leq 1$ si ha $\left|\frac{x^n}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2}$. Dato che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < +\infty \Rightarrow$ la serie converge totalmente su $[-1,1]$

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente su $[-1,1]$ (e a maggior ragione su $]-1,1]$) e converge anche puntualmente su $[-1,1]$

$\Rightarrow$ la (2) ha come risposta (d)
la (3) ha come risposta $\boxed{\text{Sì}}$

(4) Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f''(0) = 2a_2$. Nel nostro caso

$$f''(0) = 2 \cdot \frac{(-1)^2}{1+2^2} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

2. Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da:

$$F(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$$

Si dia per buono che la restrizione di F all'insieme

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$$

è bigettiva da Ω a un aperto W di $\mathbb{R}^2$ (notiamo che Ω è il disco di centro $(1, 1)$ e raggio 1). Dunque è ben definita la funzione inversa $G := F^{-1} : W \to \Omega$, che naturalmente ha due componenti: $G(u, v) = (G_1(u, v), G_2(u, v))$.

1. Si giustifichi il fatto che il punto $(0, 2)$ appartiene a W.
2. Si calcoli

$$\frac{\partial}{\partial u} G_2(0, 2).$$

① $(0,2) = F(1,1)$ dunque $(0,2) \in W$

② Calcoliamo $J_F(x,y)$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2x$$

$$\Rightarrow J_F(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Si vede che J_F ha determinante $8 \neq 0 \Rightarrow$ posso prendere $J_F(1,1)^{-1}$

$$J_F(1,1)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per la teoria so che $J_G(0,2) = J_F(1,1)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\partial G_2}{\partial u}(0,2) = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

3. Si consideri il campo $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := (2x+y+2z, x-y+3z, 2x+3y-z)$$

1. $\vec{f}$ ammette potenziale.

   SI

   NO

2. $\vec{f}$ ammette potenziale vettore.

   SI

   NO

① $\text{rot}\,\vec{f} = \det \begin{bmatrix} i & D_x & 2x+y+z \\ j & D_y & x-y+3z \\ k & D_z & 2x+3y-z \end{bmatrix} = i(3-3) - j(2-2) + k(1-1) = 0$

e $\vec{f}$ è definito su $\mathbb{R}^3$ che è semp. connesso $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sì}}$

CI SI POTEVA RICORDARE CHE se A è una matrice allora $\vec{f}(X) = AX$ è conservativo $\Leftrightarrow$ A è simmetrica

② $\text{div}\,\vec{f} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{f}$ è solenoidale su $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ esiste pot. vettore

($\vec{f}(X) = AX$ solenoidale $\Leftrightarrow$ traccia$(A) = 0$)

4. Si considerino il dominio D in $\mathbb{R}^3$ e il campo vettoriale $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 9, x^2+y^2 \geq 5, z \geq 0\} \quad , \quad \vec{f}(x,y,z) := (y,-x,z).$$

Consideriamo inoltre:

$$S := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 9, x^2+y^2 \geq 5, z \geq 0\}$$

e i punti:

$$P_1 := (2,1,2) \quad , \quad P_2 := (2,1,1) \quad , \quad P_3 := (2,2,0).$$

Diamo per buono che S è una superficie parametrica e che $S \subset \partial D$

1. Si scriva la normale unitaria uscente da D in P_1, se questa ha senso, oppure si scriva "non esiste".
2. Si scriva la normale unitaria uscente da D in P_2, se questa ha senso, oppure si scriva "non esiste".
3. Si scriva la normale unitaria uscente da D in P_3, se questa ha senso, oppure si scriva "non esiste".
4. Si dica se qualcuno tra P_1, $P;2$ e P_3 si trova nel bordo $\Sigma(S)$, indicando quale tra le seguenti affermazioni è vera.
   (a) $P_1 \in \Sigma(S)$, $P_2 \notin \Sigma(S)$, $P_3 \notin \Sigma(S)$,
   (b) $P_1 \notin \Sigma(S)$, $P_2 \in \Sigma(S)$, $P_3 \notin \Sigma(S)$,
   (c) $P_1 \notin \Sigma(S)$, $P_2 \notin \Sigma(S)$, $P_3 \in \Sigma(S)$,
   (d) $P_1 \in \Sigma(S)$, $P_2 \in \Sigma(S)$, $P_3 \notin \Sigma(S)$,
   (e) $P_1 \in \Sigma(S)$, $P_2 \notin \Sigma(S)$, $P_3 \in \Sigma(S)$,
   (f) $P_1 \notin \Sigma(S)$, $P_2 \in \Sigma(S)$, $P_3 \in \Sigma(S)$,
   (g) $P_1 \in \Sigma(S)$, $P_2 \in \Sigma(S)$, $P_3 \in \Sigma(S)$ (tutti tre) ,
   (h) $P_1 \notin \Sigma(S)$, $P_2 \notin \Sigma(S)$, $P_3 \notin \Sigma(S)$ (nessuno dei tre).
5. Si calcoli il flusso $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ di $\vec{f}$ attraverso S orientata tramite la normale $\hat{\nu}$ uscente da D.

Si ha che $\partial D = \{x^2+y^2+z^2=9, x^2+y^2 \geq 5, z \geq 0\} \cup$
$\{x^2+y^2+z^2 \leq 9, x^2+y^2=5, z \geq 0\} \cup$
$\{x^2+y^2+z^2 \leq 9, x^2+y^2 \geq 5 \ z=0\} =$
$S \cup \underbrace{\{x^2+y^2=5 \quad 0 \leq z \leq 2\}}_{C} \cup \underbrace{\{z=0, 5 \leq x^2+y^2 \leq 9\}}_{A}$

SI VEDE ALLORA CHE

- $P_1 = (2,1,2) \in S \cap C \Rightarrow$
$\boxed{\text{non}}$ si può prendere la normale in P_1

- $P_2 = (2,1,1) \in C$, $P_2 \notin A$, $P_2 \notin S \Leftrightarrow$
P_2 annulla solo $-x^2-y^2+1 =: G_c(x,y,z) \Rightarrow$

$$\hat{\nu}(P_2) = \frac{\nabla G_c(2,1,1)}{\|\nabla G_c(2,1,1)\|} = \frac{(-2x,-2y,0)}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\Bigg|_{(2,1,1)} = \frac{(-2,-1,0)}{\sqrt{5}}$$

- $P_3 = (2,2,0) \in A \quad P_3 \notin C \quad P_3 \notin S \Rightarrow$

$$\hat{\nu}(P_3) = (0,0,-1)$$

SI HA CHE

$$\Sigma_1(S) = \{x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=5,\ z\geq 0\} \cup$$
$$\{x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2\geq 5,\ z=0\} \cup$$
$$\{x^2+y^2+z^2\leq 9,\ x^2+y^2=5,\ z=0\} =$$

$$\{x^2+y^2=5,\ z=2\} \cup \{x^2+y^2=9,\ z=0\} \cup \{x^2+y^2=5,\ z=0\}$$

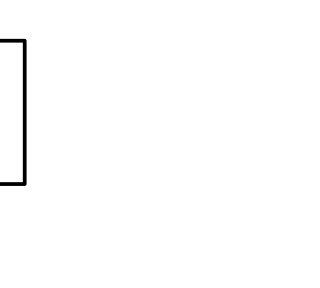
DUNQUE $\quad P_1 \in \Sigma(S) \quad P_2 \notin \Sigma_1(S) \quad P_3 \notin \Sigma_1(S)$

(è giusta la (a) di 4)

- Si vede che $\operatorname{div} \vec{f} = 0-0+1 = 1 \Rightarrow$

$$\phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \text{(coordinate cilindriche)}$$

$$\iiint_{\tilde{D}} \rho\, d\theta\, dz \qquad \text{dove } \tilde{D} = \{0\leq\theta\leq 2\pi,\ \sqrt{5}\leq\rho\leq 3,\ z^2+\rho^2\leq 3\}$$



$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{5}}^{3} \rho\, d\rho \int_0^{\sqrt{9-\rho^2}} dz =$$

$$2\pi \int_{\sqrt{5}}^{3} \rho\sqrt{9-\rho^2}\, d\rho = \pi \int_5^9 \sqrt{9-s}\, ds =$$

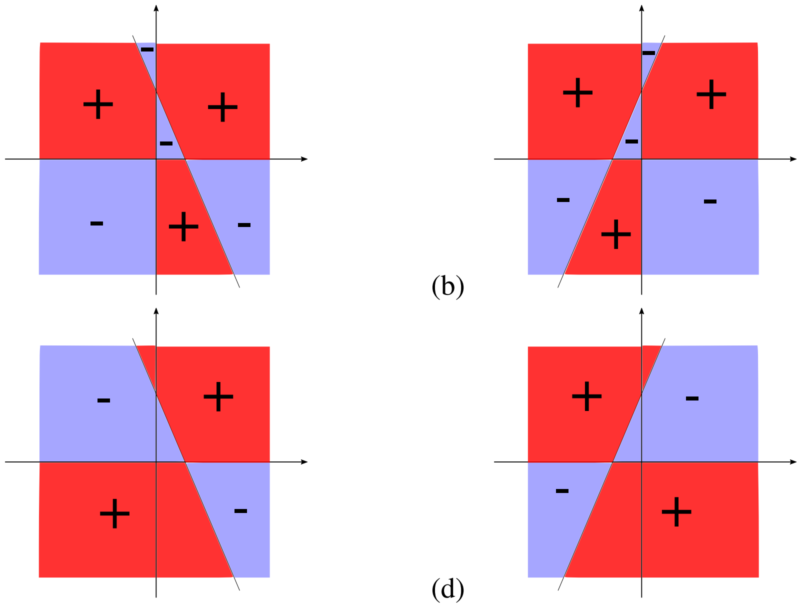
$$\pi \left[-\frac{2}{3}(9-s)^{\frac{3}{2}}\right]_5^9 = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} = \boxed{\frac{16\pi}{3}}$$

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) := x^2 y(2x + y - 8)$$

Per rispondere ai seguenti quesiti conviene trovare tutti i punti critici di f e catalogarli.

1. Quale delle seguenti figure rappresenta il segno di f (indicando in rosso le zone in cui $f(x, y) > 0$ e in blu le zone in cui $f(x, y) < 0$).



(a) (b) (c) (d)

2. Se $P_0 = (0, 0)$ si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.
   (a) P_0 non è critico.
   (b) P_0 è critico ed è di massimo relativo.
   (c) P_0 è critico ed è di minimo relativo.
   (d) P_0 è critico ma non è né di massimo né di minimo relativo.
3. Se $P_1 = (8, 0)$ si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.
   (a) P_1 non è critico.
   (b) P_1 è critico ed è di massimo relativo.
   (c) P_1 è critico ed è di minimo relativo.
   (d) P_1 è critico ma non è né di massimo né di minimo relativo.
4. Se $P_2 = (0, 8)$ si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.
   (a) P_2 non è critico.
   (b) P_2 è critico ed è di massimo relativo.
   (c) P_2 è critico ed è di minimo relativo.
   (d) P_2 è critico ma non è né di massimo né di minimo relativo.
5. Si dica quale tra le seguenti affermazioni - ANCHE PIÙ D'UNA- è corretta.
   (a) Non ci sono altri punti critici fuori da quelli elencati sopra.
   (b) esistono punti critici P diversi da P_0, P_1 ma nessuno di questi è di massimo o di minimo relativo.
   (c) esiste almeno un P critico diverso da P_0, P_1 e P_2 che sia di massimo relativo.
   (d) esiste almeno un P critico diverso da P_0, P_1 e P_2 che sia di minimo relativo.
6. Si trovi il massimo di f nell'insieme $T := \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 8 - 2x\}$.
7. Si trovi il minimo di f nell'insieme $T := \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 8 - 2x\}$.

(1) INCROCIANDO I SEGNI DI x^2, y e $2x+y-8$ si vede che la figura corretta è la (c)

NOTIAMO che $f=0$ sulle tre rette $x=0$, $y=0$, $2x+y=8$ che si intersecano nei tre punti $P_0=(0,0)$, $P_1=(0,8)$ e $Q=(4,0)$ ($Q \neq P_3$!). Dato che f non cambia segno quando attraversa l'asse y (a parte vicino al punto P_1) si vede che tutti i punti $(0,y)$ con $0<y<8$ sono pti di massimi relativi e i punti $(0,y)$ con $y>0$ o $y<0$ sono dei pti di minimo relativo. La figura dice anche che $(0,0)$, $(0,8)$ e $(4,0)$ sono dei pti di sella.

Facendo i conti si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy(2x+y-8) + x^2y(2) = 2xy(3x+y-8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2(2x+y-8) + x^2y(1) = x^2(2x+2y-8) = 2x^2(x+y-4)$$

Se eguaglio a zero $\Rightarrow \begin{cases} 2xy(4x+y-8)=0 \\ 2x^2(x+y-4)=0 \end{cases}$

VERO ALLORA CHE I PTI CRITICI SONO:

(A) $(0,y)$ per ogni y. (B) $(4,0)$ (C) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow (2,2)$

Facendo le derivate seconde trovo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y(6x+y-8) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x(3x+2y-8) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 ,$$ da cui

$$Hf(2,2) = \begin{bmatrix} 4(12+2-8) , & 4(6+4-8) \\ 4(6+4-8) & , 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$ $\det > 0$, $a_{11} > 0$

$\Rightarrow$ $(2,2)$ pto di minimo

. Da tutto ciò si vede che le risposte corrette sono

2 (d) 3 (a) 4 (d) 5 (c)

. Per l'ultima questione notiamo che T è il triangolo i cui lati si trovano nelle tre rette $x=0$, $y=0$, $2x+y=8$ su cui $f=0$. Dato che T è limitato e chiuso esistono $\max_T f$ e $\min_T f$. Dato che $f \leq 0$ su T (per il punto 1!) $\Rightarrow \max_T f = 0$ mentre il punto di minimo non può che essere $(2,2) \Rightarrow$

$$\min_{T} f = f(2,2) = 4\cdot 2\,(4+2-8) = \boxed{-16}$$

6. Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = & x - y + z \quad -3 \\ y' = & y \quad\quad\quad 1 \\ z' = & y + z \end{cases}$$

che può essere scritto nella forma

$$Y' = AY + B(t)$$

dove

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diamo per buono che il polinomo caratteristico di A è $p(\lambda) = (1-\lambda)^3$.

1. Si dica quanto fa la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$.
2. Si trovi una soluzione COSTANTE $\bar{Y}$ per il sistema, oppure si scriva "non esiste"
3. Si trovi la soluzione del sistema con condizione iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Fine Test

- Cominciamo dal punto 2. Se $\bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deve essere

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{Y}'(t) = \begin{bmatrix} a - b + c - 3 \\ b + 1 \\ b + c \end{bmatrix} \iff b = -1 \quad c = 1 \quad a = 1$$

$$\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Per il punto 3 prendo $Y(t) = \bar{Y}(t) + Y_0(t)$ dove $Y_0' = AY_0$

Se metto $t=0$ ho $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + Y_0(0) \Rightarrow Y_0(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dunque Y_0 deve risolvere $Y_0' = AY_0 \quad Y_0(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Cerchiamo ora la forma di Jordan di A. Posto $B = A - I$ si ha

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{HA RANGO 2 !!} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(B) = 1 \quad (\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} B^2 = 2, \ \dim \operatorname{Ker} B^3 = 3) \Bigg\} \Rightarrow \boxed{m_G(1) = 1}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Scelgo e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$; per esempio $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\left(\begin{array}{c}\text{Notare che} \\ e_3 = Y_0(0)\end{array}\right)$

e poi $\quad e_2 = Be_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_1 = Be_2 = B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Allora $\quad A = M J M^{-1}$ dove

$$M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \ J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} e_3 = M e^{tJ} \hat{e}_3 = e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} t^2/2 - t \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$$

$$X_0(t) = \frac{t^2 - 2t}{2} e^t \qquad Y_0(t) = e^t \qquad Z_0(t) = t e^t$$

$$\boxed{\begin{aligned} X(t) &= \frac{t^2 - 2t}{2} e^t + 1 \\ Y(t) &= e^t - 1 \\ Z(t) &= t e^t + 1 \end{aligned}}$$