Test di Analisi 2 del 19/02/21 (terzo appello invernale 20-21)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.
*Campo obbligatorio

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e mezza)

2. Cognome *

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

6. 1 punto

Si dica se f è continua

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Sì
- [ ] No

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^4} \right| \leq \frac{x^2+y^4}{x^2+y^4} |y| = |y|$$

$$\text{e } \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

7. 1 punto

Si individui la risposta corretta:

(a) $f'(0,0)(\vec{v})$ non esiste per nessun vettore $\vec{v}$
(b) $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per alcuni $\vec{v}$, ma non per tutti
(c) $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per tutti i vettori $\vec{v}$, ma non è lineare in v
(d) $f'(0,0)(\vec{v})$ esiste per tutti i vettori $\vec{v}$ ed è lineare in $\vec{v}$

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- ( ) (b)
- ( ) (c)
- (X) (d)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{(tv_x)^2(tv_y)}{(tv_x)^2+(tv_y)^4} = \lim_{t\to 0}\frac{v_x^2 v_y}{v_x^2+t^2v_y^4}$$

$= v_y$ (se $v_y=0 \Rightarrow \frac{v_x^2 v_y}{v_x^2+tv_y^4} \Rightarrow \forall t$)

$= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}$ è lineare in $v=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix}$

8. 3 punti

La funzione f è differenziabile in $(0,0)$

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) Sì
- (X) No

9. 2 punti

Si spieghi come si è giunti alla conclusione indicata nel punto precedente.

Se è diff. $\Rightarrow df(0,0)(v_x,v_y) = -v_y$. Vediamo se è verificata la def. di diff.

Devo fare $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(=0\ ??)$. TROVO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y-y(x^2+y^4)}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^4)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-y^5}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^4)}$$

NON FA ZERO se mi metto su $\{x=0, y>0\}$ viene $\lim_{y\to 0^+}\frac{-y^5}{y^5} = -1$

Esercizio Due

Si considerino il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := 2xy^2z\,\vec{\mathbf{i}} + 2x^2yz\,\vec{\mathbf{j}} + x^2y^2\,\vec{\mathbf{k}},$$

la curva $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) := \cos(t)\,\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{32t}{\pi}\vec{\mathbf{k}}$$

e il dominio (cilindrico) $D \subset \mathbb{R}^3$ definito da:

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$$

10. 1 punto

$\vec{f}$ è conservativo

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Sì
- [ ] No

è irrotazionale su $\mathbb{R}^3$ (converso)

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 4xyz \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 2xy^2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 4xyz$

$\frac{\partial f_2}{\partial z} = 2x^2y \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 2xy^2 \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 2x^2y$

11. 1 punto

$\vec{f}$ è solenoidale

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Sì
- [x] No

$\text{div}\,\vec{f} = 2y^2z + 2x^2z = 2z(x^2+y^2) \neq 0$

12. 3 punti

si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$; $= V(\gamma(\pi/4)) - V(\gamma(0)) = V\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 8\right) - V(0,0,0)$

con V potenziale.

2

Cerco V potenziale di $\vec{f}$. $\frac{\partial V}{\partial x} = 2xy^2z \Rightarrow V = x^2y^2z + c(y,z)$

$\frac{\partial V}{\partial y} = 2x^2yz \Rightarrow V = x^2y^2z + d(x,z)$ $\Bigg\} \iff V = x^2y^2z + e(z)$

$\frac{\partial V}{\partial z} = x^2y^2 \Rightarrow V = \boxed{x^2y^2z + \delta \text{ con } \delta \in \mathbb{R}}$

13. 4 punti

si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso ∂D (con la normale uscenta da D).

$$\phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f} = 2\iiint_{\substack{x^2+y^2\le 1 \\ 0\le z\le 1}} (x^2+y^2) z = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \rho \, d\rho \int_0^1 z \, dz = 2\cdot 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{2}$$

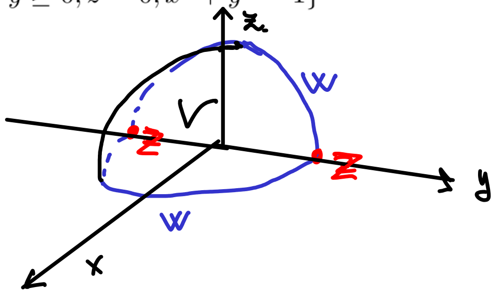
Esercizio Tre

Si considerino gli insiemi

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = 0, z \geq 0, x^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y \geq 0, z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$
$$Z := \{(-1, 0, 0), (1, 0, 0)\}$$

e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y, z) := 2x + 2y + z$$



14. 1 punto

Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta:

(a) V è una superficie regolare e $\Sigma(V) = W$;

(b) V è una superficie regolare e $\Sigma(V) = Z$;

(c) V è una superficie regolare a tratti, $\Sigma(V) = W$, $\Sigma^*(V) = Z$;

(d) V è una superficie regolare a tratti, $\Sigma(V) = \emptyset$, $\Sigma^*(V) = W$;

(e) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- [x] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)
- [ ] (d)
- [ ] (e)

15.

1 punto

Si dica quale dei seguenti vettori ν è normale a V nel punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

se V fosse la sfera:

$$N_V\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left\{\lambda\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{\lambda\left(-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$(\Rightarrow (c))$

ma V non è tutta la sfera e $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \notin V$

(a) $\nu = \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$

(b) $\nu = -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{k}$

(c) $\nu = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

(d) $\nu = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

(e) nessuno di questi

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- X (e)

16.

1 punto

f è costante su W

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- X No

17.

1 punto

I punti di Z sono stazionari per f su V

Contrassegna solo un ovale.

- X Sì
- No

18. 4 punti

Bastano i moltiplicatori su $V \setminus W$

Si dia per buono che i punti di massimo per f su V non appartengono a W. Si trovi

$$\max_{P\in V} f(P)$$

$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla G \\ G=0 \quad y>0 \quad z>0 \end{cases}$ $\quad G = x^2+y^2+z^2-1$

$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \quad y>0, z>0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \quad x = y = 2z \Downarrow 4z^2+4z^2+z^2=1$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3} = y \quad z = \frac{1}{3} \Rightarrow f$ VALE $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$

3

Esercizio Quattro

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare e omogenera:

$$x^2y'' + (1-2x)y' - 4y = 0$$

Diamo per buono che le soluzioni si possono esprimere come serie di potenze in x, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

19. 2 punti

Si dica quale tra le seguenti relazioni ricorsive sono soddisfatte da a_n.

(a) $a_{n+1} = a_n\,(n-4)$;

(b) $a_{n+1} = -a_n\,(n-4)$;

(c) $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n-4)}$;

(d) $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(n-4)}$;

(e) nessuna della precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- (X) (b)
- ( ) (c)
- ( ) (d)
- ( ) (e)

20. 1 punto

si dica se esiste una soluzione y tale che $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

Contrassegna solo un ovale.

- [ ] Sì
- [x] No

dovrebbe essere $a_0 = 1$ $a_1 = 1$ NON TORNA

ma la rel. ricorsiva dice $a_1 = a_0(-4)$

21. 1 punto

si dica se esiste una unica soluzione y tale che $y(0) = -1$, $y'(0) = -4$

Contrassegna solo un ovale.

- [x] Sì
- [ ] No

se metto $a_0 = -1$ trovo IN MODO UNIVOCO tutti gli a_n con $n \geq 1$

e vedo che $a_1 = -4$ TORNA

22. 4 punti

si calcoli esplicitamente la soluzione, se esiste, tale che $y'(0) = 4$, oppure si dia una delle risposte "non esiste"/"non è unica".

$\left[a_{n+1} = (4-n)a_n\right]$ $a_0 = 1$ $a_1 = 4 \cdot a_0 = 4$ $a_2 = 3a_2 = 12$

$a_3 = 2a_2 = 24$ $a_4 = a_3 = 24$, $a_5 = 0$

$a_n = 0 \ \forall n \geq 5$

$y(x) = 1 + 4x + 12x^2 + 24x^3 + 24x^4$

Esercizio Cinque

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -x + 4y - 1 \\ y' &= -x + 3y - 1 \end{cases} \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere come $Y' = AY + B$ dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

23. 1 punto

La matrice A

(a) ha due autovalori distinti;
(b) ha un solo autovalore di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1;
(c) ha un solo autovalore di molteplicità algebrica 1 e molteplicità geometrica 2;
(d) ha un solo autovalore di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 2;
(e) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- (X) (b)
- ( ) (c)
- ( ) (d)
- ( ) (e)

$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1+\lambda)(\lambda-3)+4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$

$\lambda = 1 \quad (m_A = 2)$

$B = A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ rango 1

24. 2 punti

Si trovi una soluzione **costante** $\bar{Y}$ per (Sys), o si scriva "non esiste"

$Y(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Y(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dunque $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+4b = 1 \\ -a+3b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow b = 0 \quad a = -1$

25. 5 punti

Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) **tale che** $x(0) = 0, y(0) = 0$.
Suggerimento: si cerchi $Y(t)$ come somma $Y(t) = \bar{Y}(t) + Y_0(t)$; in questo modo Y_0 è soluzione di $Y' = AY$ – si cerchi di trovare la forma di Jordan di A e applicare la formula risolutiva per quest'ultimo problema.

$Y(t) = \bar{Y}(t) + Y_0(t)$ con $Y_0' = AY_0$

e $0 = \bar{Y}(0) + Y_0(0) \Leftrightarrow Y_0(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{Y(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 1-2t \\ -t \end{bmatrix}}$

Dato che $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ posso prendere $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed $e_1 = Be_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Allora $A = MJM^{-1}$ con $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Se $Y_0' = AY_0$ $Y_0(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Y_0(t) = M e^t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} e_2 = e^t M \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$
$= e^t \begin{bmatrix} -2t+1 \\ -t \end{bmatrix}$