Test di Analisi 2 11/06/21 (primo appello estivo 20-21)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

*Campo obbligatorio

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 45 minuti)

2. Cognome *

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

6. 2 punti

Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, \infty]$ e supponiamo che f sia misurabile. Si dica quali delle seguenti affermazioni – anche più di una –sono (sempre) vere.

(a) Vale la formula:

$$\int_{\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

(b) Vale la formula:

$$\int_{\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\, dy \right) dx = \int_{\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\, dx \right) dy.$$

(c) f è integrabile.

Seleziona tutte le voci applicabili.

- [ ] (a)
- [x] (b)
- [ ] (c)

Esercizio Due

Consideriamo la serie di potenze $f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n(n-1)}$.

7. 1 punto

(a) Si scriva il raggio di convergenza R della serie.

$R = 1/2$

8. 1 punto

(b) Si dica quale tra le seguenti affermazioni è vera:

(a) La serie converge per $-R < x < R$;
(b) La serie converge per $-R < x \leq R$;
(c) La serie converge per $-R \leq x < R$;
(d) La serie converge per $-R \leq< x \leq R$;

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- ( ) (b)
- ( ) (c)
- (X) (d)

9. 2 punti

(c) Si trovi il valore di $f'''(0)$, o si scriva "non esiste".

-8

$$f'''(0) = 3!\, a_3 = \frac{6 \cdot (-2)^3}{3 \cdot 2} = -8$$

10. 2 punti

(d) Si dica se la serie converge totalmente su $]-R, R[$.

Contrassegna solo un ovale.

- (X) Sì
- ( ) No

Perché $\|f_n\|_\infty = \sup_{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}} \frac{|2^n x^n|}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$

e $\sum \frac{1}{n(n-1)} < +\infty$

Esercizio Tre

Si considerino i seguenti insiemi (contenuti in $\mathbb{R}^3$):

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{3}\}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 4, 0 \leq z \leq \sqrt{3}\}$$
$$B_0 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4, z = 0\}$$
$$B_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 4, z = \sqrt{3}\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := xe^{-z^2}\vec{\mathbf{i}} - ye^{-z^2}\vec{\mathbf{j}} + 4y^2\vec{\mathbf{k}}$$

Si vede facilmente che $\partial D = S \cup B_0 \cup B_1$.
Indichiamo anche (quando esiste) con $\hat{\nu}$ la normale unitaria a ∂D uscente da D.

11. 1 punto

(a) Si calcoli $\hat{\nu}$ nel punto $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{(2)}/2, \sqrt{(3)})$, o si scriva "non esiste";

NON ESISTE

12. 1 punto

(b) Si calcoli $\hat{\nu}$ nel punto $(-1, 1, \sqrt{(2)})$, o si scriva "non esiste";

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

13. 1 punto

(c) Si calcoli $\hat{\nu}$ nel punto $(1,1,0)$, o si scriva "non esiste".

$(0, 0, -1)$

14. 3 punti

(d) Si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$ DELLA FORMA $\vec{F}(x,y,z) = F_2(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + F_3(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$, o si scriva "non esiste".

$F_2 = 4xy^2 \quad F_3 = xy\,e^{-z^2}$ (ce ne sono altri naturalmente)

15. 4 punti

(e) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$.

15π

Si nota che div $\vec{g}=0$

e allora $0=\iint_S \vec{g}\cdot\hat{\nu} + \iint_{B_0} \vec{g}\cdot\hat{\nu} + \iint_{B_1} \vec{g}\cdot\hat{\nu}$

È facile vedere che

$\iint_{B_0} \vec{g}\cdot d\nu = -\iint_{x^2+y^2\le 4} 4y^2\,dx\,dy = -16\pi$

$\iint_{B_1} \vec{g}\cdot d\nu = \iint_{x^2+y^2\le 1} 4y^2\,dx\,dy = \pi$

16. 2 punti

(f) Si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

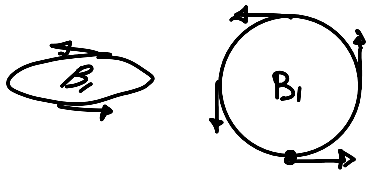
dove $\vec{F}$ è il campo introdotto al punto (d), mentre $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$ è definita da:

$$\gamma(t) := -\sin(t)\vec{\mathbf{i}} + \cos(t)\vec{\mathbf{j}} + \sqrt{3}\vec{\mathbf{k}}.$$

(anche in questo caso si può rispondere "non esiste").

π

Usando Stokes si vede che l'integrale è pari al flusso di $\vec{g}$ su B_1 - la γ è coerente con $\hat{\nu}$!! → VIENE π



$\gamma(-\pi) = (0, -1, \sqrt{3})$

$\dot{\gamma}(\pi) = (1, 0, 0)$

IN FONDO

Esercizio Quattro

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = 16x^2 + y^2 - 8e^{xy-1}$$

17. 6 punti

(a) Si trovino tutti i punti stazioanri di f e per ognuno di questi si dica si si tratta di massimi relativi, minimi relativi o altro.

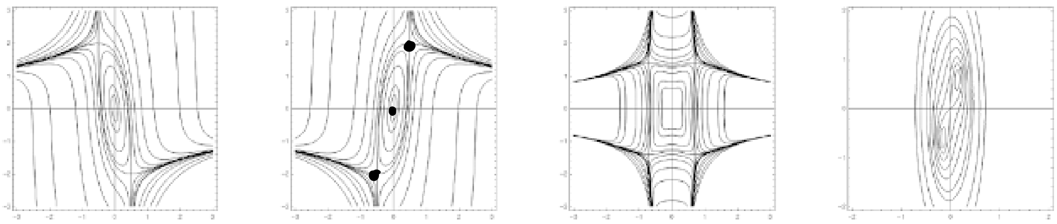
CI SONO TRE PTI STAZIONARI

$(0,0)$ MINIMO LOCALE

$\pm(\frac{1}{2}, 2)$ PTI DI SELLA

18. 1 punto

(b) Si dica quale delle seguenti figure rappresenta le linee di livello di f.



(a) (b) (c) (d)

PT. STAZIONARI

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- [X] (b)
- (c)
- (d)
- Altro: ______________

19. 2 punti

(c) Si scriva il massimo di f su $\mathbb{R}^2$, dando eventualmente la risposta "non esiste"

NON ESISTE

$\lim_{x \to +\infty} f(x,-x) = +\infty$

20. 2 punti

(d) Si scriva il minimo di f su $\mathbb{R}^2$, dando eventualmente la risposta "non esiste"

NON ESISTE

$\lim_{x \to +\infty} f(y,x) = -\infty$

Esercizio Cinque

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= 3x + y - e^t \\ y' &= -x + y + e^t \end{cases}$$

che si può scrivere come $Y' = AY + B$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -e^t \\ e^t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Diamo per buono che vale la formula $A = MJM^{-1}$, dove:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. 3 punti

(a) Si calcoli la soluzione dell'equazione omogenea $Y' = AY$, con la condizione iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$x(t) = (t+1)e^{2t} \qquad y(t) = -t\,e^{2t}$

$\left(Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{2t} M \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \right.$

$\left. e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{t} \begin{bmatrix} t+1 \\ -t \end{bmatrix} \right)$

22. 6 punti

(b) Si calcoli la soluzione dell'equazione con il dato iniziale $x(0) = y(0) = 0$.

$x(t) = e^t - e^{2t} \qquad y(t) = e^{2t} - e^t$

$\left(Y(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\, ds = \int_0^t e^{\tau A} B(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t M e^{2\tau} \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} e^{t-\tau} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \right.$

$\int_0^t e^{t+\tau} M \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^t e^{t+\tau} M \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^t e^{t+\tau} M \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau =$

$\left. \left(\int_0^t e^{t+\tau} d\tau \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[e^{t+\tau} \right]_0^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(e^{2t} - e^t \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$

VERIFICA

$$x(t) = e^t - e^{2t} \qquad x'(t) = e^t - 2e^{2t}$$
$$y(t) = e^{2t} - e^t \qquad y'(t) = 2e^{2t} - e^t$$

$$3x + y - e^t = 3e^t - 3e^{2t} + e^{2t} - e^t - e^t = -2e^{2t} + e^t \quad (= x'(t))$$
$$-x + y + e^t = -e^t + e^{2t} + e^{2t} - e^t + e^t = 2e^{2t} - e^t \quad (= y'(t))$$

IN ALTERNATIVA USIAMO LA DEF. DI INTEGRALE CURVILINEO

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-\pi}^{\pi} \vec{F}(\underbrace{-\sin t, \cos t, \sqrt{3}}_{\gamma(t)}) \cdot (\underbrace{-\cos(t), -\sin(t), 0}_{\gamma'(t)})\, dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(0,\ 4(-\sin t)\cos^2(t),\ -\sin(t)\cos(t)e^{-3}\right)(-\cos(t), -\sin(t), 0)\, dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 4\sin^2(t)\cos^2(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{2\pi}{2} = \pi$$