Test di Analisi 2 23/07/21 (secondo appello estivo 20-21)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.
*Campo obbligatorio

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: 2/3 per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: 2^3 per 2^3;
· le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: 1<=2 per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: a_n per a_n;
· sqrt (preferibile) oppure ^(1/2) per indicare la radice, dunque sqrt(2) oppure 2^(1/2) per $\sqrt{2}$;
· exp (preferibile) oppure e^ per indicare l'esponenziale, dunque exp(2) oppure e^(2) per e^2;
· Pi per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio ((1+x)/2)^((x+y)/(x-y));
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in (1,2,3);
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare SUM(n=0,infinito)a_n

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 45 minuti)

2. Cognome *

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Consideriamo l'insieme $V \subset \mathbb{R}^3$ definito da:

$$V := \{(x,y,z) : xz + yz = 2, xy + 3xz + yz = 5\}$$

e il punto $P_0 := (1,1,1)$. È facile vedere che $P_0 \in V$.

6. 2 punti

Tra le affernazioni che seguono si indichino quelle (anche più di una) che seguono dal teorema del Dini.

(a) Vicino a P_0 l'insieme V si descrive come il sostegno di una curva del tipo $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$, per $1 - \varepsilon < t < 1 + \varepsilon$, dove ε è un opportuno numero positivo;

(b) Vicino a P_0 l'insieme V si descrive come il sostegno di una curva del tipo $\gamma(t) = (\gamma_1(t), t, \gamma_3(t))$, per $1 - \varepsilon < t < 1 + \varepsilon$, dove ε è un opportuno numero positivo;

(c) Vicino a P_0 l'insieme V si descrive come il sostegno di una curva del tipo $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$, per $1 - \varepsilon < t < 1 + \varepsilon$, dove ε è un opportuno numero positivo.

Seleziona tutte le voci applicabili.

- [ ] (a)
- [x] (b)
- [x] (c)

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz + yz - 2 \\ xy + 3xz + yz - 5 \end{pmatrix} \qquad J_G(x,y,z) = \begin{bmatrix} z, & z, & x+y \\ y+3z, & x+z, & 3x+y \end{bmatrix}$$

$$J_G(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

det = 0

det ≠ 0

det ≠ 0

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}(1) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2-4 \\ -4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. 2 punti 3

Nel caso sia possibile descrivere V (vicino a P_0) mediante una $\gamma :]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to \mathbb{R}^3$, come detto in (c) del punto precedente, si calcoli $\gamma'(1)$ - oppure si scriva "non esiste".

$\gamma'(1) = -\vec{i} + \vec{k} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esercizio Due

Consideriamo Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ e $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$\Omega := \{(\theta, \varphi) : -\pi/2 < \theta < \pi/2, 0 < \varphi < \pi/3\}$$
$$\Gamma(\theta, \varphi) := \Big((2\cos(\varphi) - 1)\cos(\theta)\ ,\ (2\cos(\varphi) - 1)\sin(\theta)\ ,\ 2\sin(\varphi) \Big).$$

Diamo per buono che Γ è una superficie parametrica e poniamo $S := \Gamma(\bar{\Omega})$ (S è il sostegno di Γ)

Consideriamo anche l'insieme $R \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando

$$\{(\rho, z) : \rho \geq 0, (\rho + 1)^2 + z^2 = 4\}$$

attorno all'asse z.

8. 1 punto

Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.

(a) $S = R$;
(b) $S \subset R$ e $S \neq R$;
(c) $R \subset S$ e $S \neq R$;
(d) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- (X) (b)
- ( ) (c)
- ( ) (d)

in effetti se $x = (2\cos\varphi - 1)\cos\theta$
$y = (2\cos\varphi - 1)\sin\theta$
$z = 2\sin\varphi$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2\cos\varphi - 1 \Leftrightarrow$
$\rho + 1 = 2\cos\varphi \Rightarrow$
$(\rho + 1)^2 + z^2 = 4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi = 4$

dunque $S \subset R$. Ma $S \neq R$
perché essendo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ la x è ≥ 0

$$\boxed{S = \{(x, y, z) \in R : x \geq 0\}}$$

$\Rightarrow S = \{(x,y,z) \in R : x = 0\}$

9. 2 punti

Si dica quale tra i seguenti insiemi coincide con $\Sigma(S)$ (il bordo di S).

(a)

$$\{(x,y,z) \in R : x = 0\};$$

(b)

$$\{(x,y,z) \in R : y = 0\};$$

(c)

$$\{(x,y,z) \in R : z = 0\};$$

(d)

$$\left\{(0,0,\sqrt{3}),(0,0,-\sqrt{3})\right\};$$

(e) nessuna delle precedenti.

Contrassegna solo un ovale.

- [x] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)
- [ ] (d)
- [ ] (e)

Trovo $\Sigma(S)$

Prendendo $\Gamma(\partial\Omega)$

$\partial\Omega = \{\varphi = 0, \frac{\pi}{3}\} \cup \{\theta = \pm\pi/2\}$

se $\theta = \pm\pi \to x = 0$

se $\varphi = 0 / \varphi = \pi$ sono nei punti $(0,0,\pm\sqrt{3})$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = \begin{bmatrix} -(2\cos\varphi-1)\sin\theta \\ (2\cos\varphi-1)\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix} -2\sin\varphi\cos\theta \\ -2\sin\varphi\sin\theta \\ 2\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_\Gamma = \det\begin{bmatrix} i, & -(2\cos\varphi-1)\sin\theta, & -2\sin\varphi\cos\theta \\ j, & (2\cos\varphi-1)\cos\theta, & -2\sin\varphi\sin\theta \\ k, & 0, & 2\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$= 2(2\cos\varphi-1)\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \end{bmatrix}}_{\text{questo ha modulo 1}}$$

10. 4 punti

$$\|\vec{N}_\Gamma\| = 2(2\cos\varphi-1) \quad (\geq 0 \text{ dato che } 0\leq\varphi\leq\pi/3)$$

Si calcoli la norma della normale $\|\vec{N}_\Gamma(\theta,\varphi)\|$, se $(\theta,\varphi)\in\Omega$.

$2(2\cos(\varphi)-1)$

$$2\iint_\Omega (2\cos(\varphi)-1)\,d\theta\,d\varphi =$$

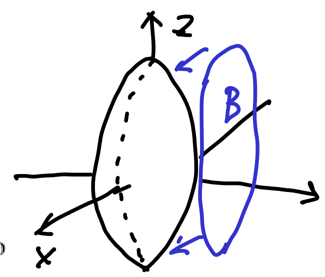
$$2\pi\int_0^{\pi/3}(2\cos(\varphi)-1)\,d\varphi =$$

$$2\pi\left[2\sin\varphi-\varphi\right]_0^{\pi/3} = 2\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

11. 2 punti

Si calcoli l'area di S.

$2\pi(\sqrt{3}-\pi/3)$



12. 2 punti

Si calcoli il flusso attraverso S (con normale definita da $\vec{N}_\Gamma$) del campo

$$\vec{f}(x,y,z) := x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} - 2z\vec{\mathbf{k}}.$$

0

N.B. $\operatorname{div}\vec{f} = 1+1-2 = 0$

$\Rightarrow \Phi(\vec{f},S) = -\Phi(\vec{f},B,\vec{k})$

dove B è "la base"

MA su B la normale è $-\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{f}\cdot\vec{\nu} = -f_1$ e

su B $x=0 \Rightarrow f_1(0,y,z) = 0$

Esercizio Tre

Si considerino l'insieme D contenuto in $\mathbb{R}^3$ e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiti da:

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\} \qquad f(x, y, z) = xyz$$

Poniamo inoltre:

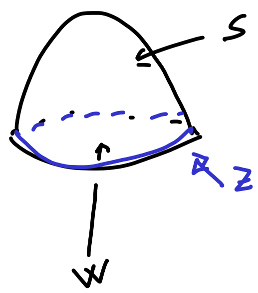
$$S := \{(x, y, z) \in D : z + x^2 + y^2 = 1\}$$
$$W := \{(x, y, z) \in D : z = 0\}$$
$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

13.

2 punti

Si dica quali delle seguenti affermazioni è corretta (non più di una).

(a) $\partial D = S$ e $\Sigma(S) = Z$;
(b) $\partial D = S \cup W$ e $\Sigma^*(\partial D) = \emptyset$;
(c) $\Sigma(\partial D) = \emptyset$ e $\Sigma^*(\partial D) = Z$;
(d) $\Sigma(S) = W$ e $\Sigma(W) = Z$;
(e) nessuna delle precedenti.



Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- (e)

14.

1 punto

Si dica se è vero che $f(P) = 0$ per ogni P in W.

Contrassegna solo un ovale.

$(xz = 0 \quad xyz = 0)$

- Vero
- Falso

I PTI CRITICI SU D devono verificare

- $\nabla f(x,y,z)=0$ e $0<z<1-x^2-y^2$

da cui $yz=0$, $xz=0$, $xy=0$ $\Rightarrow (z>0)$

$y=0$ $x=0$

TROVO $(0,0,z)$ $0<z<1$ su cui però $f=0$ (LI SCARTO)

- $\nabla f = \lambda \nabla G$ dove $G = z+x^2+y^2-1$

e $0<z = 1-x^2-y^2$ CIOÈ

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x \\ xz = 2\lambda y \\ xy = \lambda \\ 0<z = 1-x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = xy \\ yz = 2x^2 y \\ xz = 2xy^2 \\ 0<z = 1-x^2-y^2 \end{cases}$$

le eventuali soluzioni con $x=0$ o $y=0$ rendono $f=0$ (le scarto)

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \lambda = xy \\ z = 2x^2 \\ z = 2y^2 \\ 0<z = 1-x^2-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = xy \\ x^2 = y^2, \ z=2x^2 = 1-2x^2 \end{cases}$$

dunque trovo $\underbrace{x = \pm y}_{= \pm \frac{1}{2}}$ $z = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\boxed{\text{quattro punti}}$

- Gli altri punti sono su $z=0$ che rendono nulla f — ci sarebbero infatti tutti i PUNTI DI W — però questi li scarto

Se calcolo $f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ trovo i due valori $\pm\frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{8}$ è il max $-\frac{1}{8}$ è il min (N.B. $-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{8}$

dunque i punti critici con $f=0$ non servono)

15. 4 punti

Si dica QUANTI sono i punti P, critici vincolati per f su D, tali che $f(P) \neq 0$.

4

16. 1 punto

Si scriva il massimo di f su D oppure si scriva "non esiste".

1/8

17. 1 punto

Si scriva il minimo di f su D oppure si scriva "non esiste".

−1/8

Esercizio Quattro

Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$x(x-2)y'' + (2-3x)y' - 5y = 2 - 8x$$

Per rispondere ai questi che seguono si ricorda che che le soluzioni dell'equazione di possono scrivere come serie di potenze: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per degli opportuni coefficienti a_n.

18. 1 punto

Aggiungiamo la condizione iniziale $y(0) = 0$. Si dica quale tra le seguenti alternative è corretta.
(a) esiste una soluzione ed è unica;
(b) esiste una soluzione ma non è unica;
(c) non esiste una soluzione.

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- (X) (b)
- ( ) (c)

Se si usano le solite tecniche di derivazione sotto il segno di serie si trova che, da $y(x) = \sum a_n x^n$, segue

$$x(x-2)y'' + (2-3x)y' - 5y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2(1-n)(n+1)a_{n+1} + (n+1)(n-5)a_n \right) x^n$$

dunque gli a_n devono verificare

$$(R) \quad 2(1-n)(n+1)\, a_{n+1} + (n+1)(n-5)\, a_n = b_n = \begin{cases} 2 & n=0 \\ -8 & n=1 \\ 0 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Se metto $n = 1$ trovo $(2)(-4)\, a_1 = b_1 = -8 \iff \boxed{a_1 = 1}$

Se metto $n = 0$ trovo $2a_1 + (-5)a_0 = b_0 \iff 2 - 5a_0 = 2$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

Se $n \geq 2$ la relazione diventa

$$(\tilde{R}) \qquad a_{n+1} = \frac{(n-5)\, a_n}{2(n-1)} \qquad n \geq 2$$

che definisce tutti gli $a_n \geq 3$ una volta fissato a_2

NE SEGUE CHE

① Se voglio $y(0) = 0$ sto imponendo $a_0 = 0$.
Questa condizione è possibile come visto sopra. DUNQUE esiste una soluzione, ma non è unica perché posso fissare a piacere a_2

② se voglio $y(0) = 2$ sto imponendo $a_0 = 2$ MA a_0 deve essere ZERO $\Rightarrow$ NO SOLUZIONE

③ Se impongo $y''(0) = 2 \Rightarrow a_2 = 1$ e questo individuo un'unica soluzione che è data da:

$a_2 = 1$

$\underline{n=2} \rightarrow a_3 = \dfrac{2-5}{2(2-1)}\, a_2 = \dfrac{-3}{2} \cdot 1 = -\dfrac{3}{2}$

$\underline{n=3}$ $\quad a_4 = \frac{3-5}{2(3-1)} a_3 = \frac{-2}{2\cdot 2}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$\underline{n=4}$ $\quad a_5 = \frac{4-5}{2(4-1)} a_4 = \frac{-1}{2(3)} \frac{3}{4} = -\frac{1}{8}$

$\underline{n=5}$ $\quad a_6 = \frac{5-5}{2(5+1)} a_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n \geq 6$

NE SEGUE $\quad y(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{80}$

- Se invece parto da $y''(0) = 16 \Rightarrow a_2 = 8$ e con gli stessi calcoli

$$y(x) = x + 8x^2 - 12x^3 + 6x^4 - x^5$$

- ESSENDO UN POLINOMIO $\Rightarrow$ il raggio è $+\infty$

19. 1 punto

Aggiungiamo la condizione iniziale $y(0) = 2$. Si dica quale tra le seguenti alternative è corretta.
(a) esiste una soluzione ed è unica;
(b) esiste una soluzione ma non è unica;
(c) non esiste una soluzione.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)

20. 1 punto

Aggiungiamo la condizione iniziale $y''(0) = 2$. Si dica quale tra le seguenti alternative è corretta.
(a) esiste una soluzione ed è unica;
(b) esiste una soluzione ma non è unica;
(c) non esiste una soluzione.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- (c)

21. 2 punti

Si dica qual è il raggio di convergenza della soluzione con condizione iniziale $y''(0) = 16$, oppure si scriva "non esiste".

$+\infty$

22. 4 punti

Si scriva esplicitamente la soluzione del punto precedente (con condizione iniziale $y''(0) = 16$) o si scriva "non esiste".

$y(x) = x + 8x^2 - 12x^3 + 6x^4 - x^5$

Esercizio Cinque

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x & +y - z & +2 \\ y' = x & +2y - z & +2 \\ z' = x & +y & +1 \end{cases}$$

che può essere scritto nella forma

$$Y' = AY + B(t)$$

dove

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diamo per buono che il polinomo caratteristico di A è $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3$.

23. 1 punto

Si dica quanto fa la molteplicità geometrica dell'autovalore 1.

1

(2) . Sol. costante $\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{Y}' = 0$ e deve essere

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b - c = -2 \\ a + 2b - c = -2 \\ a + b = -1 \end{cases} \quad \text{DIFFERENZA} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \\ c = +1 \end{cases} \qquad \bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3) Cerco $Y = \bar{Y} + Y_0$ $\quad Y_0$ sol di $Y_0' = AY_0$

Se $t=0$ trovo $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + Y_0(0) \iff Y_0(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cerco la Jordanizzazione di A: so che $\lambda = 1$ è l'unico autovalore. Pongo $B = A - I \Rightarrow$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ha rango } 2$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ha rango } 1$$

Cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$ — PER ESEMPIO $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B^2 e_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_1} \quad \text{e} \quad B e_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_2}$$

DUNQUE se $M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (NB $\Rightarrow m_G(1) = 1$)

$$\Rightarrow \quad A = M J M^{-1}$$

Allora $\quad Y_0(t) = e^{tA} Y_0(0) = M e^{tJ} M^{-1} e_3 =$

$$M \quad e^t \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{e}_3 = e^t M \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2/2 + t + 1 \\ t^2/2 + t \end{bmatrix} e^t$$

24. 2 punti

Si trovi una soluzione costante $\bar{Y}$ per il sistema - oppure si scriva "non esiste"

$$\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

25. 5 punti

Si trovi la soluzione del sistema con condizione iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} t \\ t^2/2 + t + 1 \\ t^2/2 + t \end{bmatrix}$$