Test di Analisi 2 02/07/21 (secondo appello estivo 20-21)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

*Campo obbligatorio

1. Email *

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere ^ per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 45 minuti)

2. Cognome *

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Consideriamo l'insieme $V \subset \mathbb{R}^4$ definito da:

$$V := \{(x, y, w, z) : x - zy + xyz = 1, y - z - w + xyw = 2\}$$

e il punto $P_0 := (1, 2, 1, 1)$. È facile vedere che $P_0 \in V$.

6. 2 punti

Tra le affernazioni che seguono si indichino quelle (anche più di una) che seguono dal teorema del Dini.

(a) Vicino a P_0 l'insieme V si descrive come il grafico di una funzione $(x(y, z), w(y, z))$;
(b) Vicino a P_0 l'insieme V si descrive come il grafico di una funzione $(w(x, y), z(x, y))$;
(c) Vicino a P_0 l'insieme V si descrive come il grafico di una funzione $(y(x, w), z(x, w))$;

Seleziona tutte le voci applicabili.

- [x] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)

7. 2 punti

Nel caso sia possibile descrivere V (vicino a P_0) come il grafico di una funzione $(x(w, z), y(w, z))$ si trovi la derivata parziale $\frac{\partial x}{\partial z}(1, 1)$ - oppure si scriva "non esiste".

0

(1) Considero $G(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} x - zy + xyz - 1 \\ y - w - z + xyw - 2 \end{pmatrix}$

$(G(1,2,1,1) = (0,0)$ dunque $P_0 \in V)$

Si ha $J_G(x,y,w,z) = \begin{bmatrix} 1 + yz, & -z + xz, & 0, & -y + xy \\ yw, & 1 + xw, & -1 + xy, & -1 \end{bmatrix}$

$$J_G(1,2,1,1) = \begin{bmatrix} 3, & 0, & 0, & 0 \\ 2 & 2, & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Domanda 1 (a) è VERA perché $\det \frac{\partial G}{\partial(xw)}(P_0) = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$

(b) è FALSA perché $\det \frac{\partial G}{\partial(wz)}(P_0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$

(c) è FALSA perché $\det \frac{\partial G}{\partial(yz)}(P_0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 0$

Domande 2 e 3 $x(z,w)$ e $y(z,w)$ esistono perché

$\det \frac{\partial G}{\partial(xy)}(P_0) = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$. Allora

$$J_{xy}(1\ 1) = -\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{bmatrix}(P_0) \right)$$

ALLORA $\frac{\partial x}{\partial z}(1,1) = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial w}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

8. 2 punti

Nella stessa situazione del punto precedente si trovi la derivata parziale $\frac{\partial y}{\partial w}(1,1)$ - oppure si scriva “non esiste”. $-1/2$

Esercizio Due

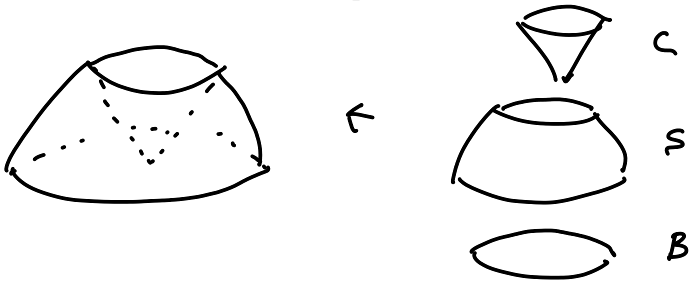
Consideriamo l’insieme $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2, z^2 \leq x^2+y^2, z \geq 0\}$$

e il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := (x^2+y^2)(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}).$$

Se $P \in \partial D$ denotiamo con $\hat{\nu}(P)$ la normale a ∂D uscente da D (a patto che sia definita).



- $\operatorname{rot} \vec{f} = \det \begin{bmatrix} i & D_x & x^3+xy^2 \\ j & D_y & x^2y+y^3 \\ k & D_z & z(x^2+y^2) \end{bmatrix} = i(2yz) - j(2xz) + \vec{k}(0) = 2z(y\vec{i} - x\vec{j})$

- $\vec{f}(x,y,z)$ è proporzionale a $\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ che si vede essere perpendicolare a $\hat{\nu}$ su C e su B $\Rightarrow \Phi(\vec{f}, C, \hat{\nu}) = \Phi(\vec{f}, B, \hat{\nu}) = 0$

$\Rightarrow \Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \Phi(f, \partial D, \hat{\nu}) = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dxdydz =$

$\iiint_D (3x^2 + y^2 + 3y^2 + x^2 + x^2 + y^2)\, dxdydz = \iiint_D 5(x^2+y^2)\, dxdydz =$ (coord. sferiche)

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (5\rho^2 \sin^2\varphi)\, \rho^2 d\rho = 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\varphi(1-\cos^2\varphi) \int_0^{\sqrt{2}} 5\rho^4 d\rho$

$(\cos\varphi = s \quad -\sin\varphi\, d\varphi = ds) = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} (1-s^2)\, ds \left[\rho^5\right]_0^{\sqrt{2}} = 8\pi\sqrt{2}\left[s - \frac{s^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} =$

$\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}\left[(3-s^2)s\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{8\pi}{3}\left(3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{8\pi}{3}\,\frac{5}{2} = \frac{20\pi}{3}$ (VEDI ANCHE IL FOGLIO DOPO)

9. 1 punto

Si dica quale tra le seguenti affermazioni è corretta.

(a) $\partial D = S \cup C$ dove:

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, 1 \le z \le \sqrt{2}\right\}$$
$$C := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le 1\right\};$$

(b) $\partial D = S \cup C$ dove:

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, 0 \le z \le 1\right\}$$
$$C := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 \le z \le \sqrt{2}\right\};$$

(c) $\partial D = S \cup C \cup B$ dove:

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, 1 \le z \le \sqrt{2}\right\}$$
$$C := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le \sqrt{2}\right\}$$
$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = 1\right\};$$

(d) $\partial D = S \cup C \cup B$ dove:

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, 0 \le z \le 1\right\}$$
$$C := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le 1\right\};$$
$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 2, z = 0\right\};$$

Contrassegna solo un ovale.

- ( ) (a)
- ( ) (b)
- ( ) (c)
- (X) (d)
- ( ) nessuna delle precedenti

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} < 2$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}$

10. 1 punto

Si scriva $\hat{\nu}((1/2, 1/2, 1/2))$ o si scriva "non esiste".

NON ESISTE

$(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}) \notin D$ dato che

$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

11. 1 punto

Si scriva $\hat{\nu}((1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}))$ o si scriva "non esiste".

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\hat{\jmath} \in C$ dato che

$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

e $\hat{\jmath} \notin S$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 < 2$

$\hat{\jmath} \notin B$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \ne 0$

12. 1 punto

Si scriva $\hat{\nu}((1/2, 1/2, 0))$ o si scriva "non esiste".

$(0, 0, -1)$

$\hat{\nu} \in B$ e $\hat{\nu} \notin S$, $\hat{\nu} \notin C$

13. 1 punto

Si calcoli $\mathrm{rot}(\vec{f})$.

$2zy\vec{i} - 2xz\vec{j} = 2z(y\vec{i} - x\vec{j})$

14. 4 punti

Si calcoli il flusso $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ (di $\vec{f}$ attraverso S con la normale $\hat{\nu}$).

$\frac{4}{3}\pi$

15. 2 punti

Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è definita da:

$$\gamma(t) := \sqrt{2}(\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}}).$$

0

USO STOKES e faccio il flusso di rot $\vec{f}$ attraverso $(B, -\vec{k})$. Ma rot $\vec{f}$ non ha componente $\vec{k}$ $\Rightarrow$ rot $\vec{f} \cdot -\vec{k} = 0$ $\Rightarrow$ flusso $= 0$

16. 1 punto

Si dica se $\vec{f}$ è un campo radiale.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- X No

Perché NON È IRROTAZIONALE

Esercizio Tre

su S

CALCOLO DIRETTO DEL FLUSSO. NOTO CHE

$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x,y,z) \Rightarrow \vec{g}\cdot\hat{\nu} = (x^2+y^2)(x,y,z)\cdot(x,y,z)\frac{1}{\sqrt{2}} = (x^2+y^2)\sqrt{2}$

$$(x^2+y^2) = 2\sin^2\varphi$$

$$\iint_S \vec{g}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sin\varphi\, d\varphi \; 2\sin^2\varphi\, \sqrt{2}$$

$d\sigma = 2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$

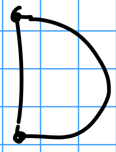
$$\rightarrow 4\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sqrt{2}\sin\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$\cos\varphi = s \qquad -\sin\varphi\, d\varphi = -ds$

$$8\pi\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}/2}(1-s^2)\,ds = 8\pi\sqrt{2}\left[s-\frac{s^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{2}\left[3s-s^3\right]_0^{\sqrt{2}/2} =$$

$$\frac{8}{3}\pi\sqrt{2}\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8}{3}\pi\left(3-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3}\pi\frac{5}{2} = \frac{20}{3}\pi$$

ES. 3

$V \longrightarrow$ 

$V = \{ G_1 \le 0,\ G_2 \le 0 \}$

dove $G_1 = x^2+y^2-1$

$G_2 = -x$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

I pti critici vincolati P sono di 3 Tipi:

(I) $\nabla f(P) = 0 \quad G_1(P)<0 \quad G_2(P)<0$. MA $\nabla f(P) \neq 0 \ \forall P$

NON CE NE SONO

(II) (A) $\nabla f(P) = \lambda \nabla G_1 \quad G_1(P)=0 \quad G_2(P)<0$ CIOÈ

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=5 \quad x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda = 1/x, \quad x>0 \\ y = -2x \\ x^2+y^2 = 5 \end{cases} \qquad \boxed{x=1,\ y=-2}$$

(B) $\nabla f(P) = \lambda \nabla G_2 \quad G_1(P)<0 \quad G_2(P)=0$ CIOÈ

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ -2 = 0 \\ x^2+y^2<5 \quad x=0 \end{cases}$$ IMPOSSIBILE

(3) $\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2 \quad G_1 = G_2 = 0$ $\longrightarrow$ TROVO I DUE "VERTICI" . $\boxed{(0,-\sqrt{5}) \text{ e } (0,\sqrt{5})}$

IN TUTTO 3 PUNTI CRITICI VINCOLATI.

• DATO CHE V è limitato e chiuso esistono $\max_V f$ e $\min_V f$ e devono essere assunti in uno dei tre pti sopra.

$f(1,-2) = 5$

$\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$

$f(0,\sqrt{5}) = -2\sqrt{5} \qquad f(0,-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} < 5$

Si considerino l'insieme V contenuto in $\mathbb{R}^2$ e la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiti da:

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, x \geq 0\} \qquad f(x, y) = x - 2y$$

17. 2 punti

Si dica QUANTI sono i punti critici vincolati di f su V.

3

18. 2 punti

Si scriva il massimo di f su V oppure si scriva "non esiste".

5

19. 2 punti

Si scriva il minimo di f su V oppure si scriva "non esiste".

$-2\sqrt{5}$

Esercizio Quattro

Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$x(x+2)y'' + (x-6)y' + y = 50x^3 - 144$$

Al solito per rispondere ai quesiti sottostanti si cercano le soluzioni sviluppabili in serie di potenze nel punto $x = 0$, cioè della forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Se $y = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} = \sum_0^\infty (n+1) a_{n+1} x^n$

$$y'' = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_0^\infty (n+1) n\, a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow (x^2+2x)y'' + (x-6)y' + y =$$

$$\sum_0^\infty \Big(n(n-1) a_n + 2(n+1)n\, a_{n+1} + n a_n - 6(n+1) a_{n+1} + a_n \Big) x^n =$$

$$\sum_0^\infty \Big((n^2 \cancel{- n} \cancel{+ n} + 1) a_n + (n+1)(2n-6) a_{n+1} \Big) x^n$$

DUNQUE

$$(R) \quad 2(n+1)(n-3) a_{n+1} + (n^2+1) a_n = b_n = \begin{cases} -144 & \text{se } n=0 \\ 50 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se metto $n=3 \Rightarrow 10 a_3 = 50 \iff \boxed{a_3 = 5}$

Se metto $n=2 \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot (-1) a_3 + 5 a_2 = 0 \iff \boxed{a_2 = 6}$

Se metto $n=1 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot (-2) a_2 + 2 a_1 = 0 \iff \boxed{a_1 = 24}$

Se metto $n=0 \Rightarrow 2 \cdot 1 (-3) a_1 + a_0 = 144 \iff \boxed{a_0 = 0}$

Se $n > 3$ R diventa

$$R^* \qquad a_{n+1} = -\frac{(n^2+1)}{2(n+1)(n-3)} a_n \qquad \forall n \geq 4$$

in cui a_4 è libero e se a_4 è assegnato $\Rightarrow$ ogni $a_{n \geq 4}$ è univocamente definito. DA TUTTO QUESTO

- $y(x) = 24x + 6x^2 + 5x^3 + a_4 \sum_4^\infty \hat{a}_n x^n$ dove gli $\hat{a}_n$ corrispondono ad $a_4 = 1$
- SE IMPONGO $y(0)=0$ $y'(0)=0 \iff a_0 = 0$ $a_1 = 0$ IMPOSSIBILE
- SE IMPONGO $y(0)=0$ $y'(0)=24 \iff a_0 = 0$ $a_1 = 24$ ho infinite soluzioni, una per ogni valore di a_4
- Se impongo $y^{(5)}(0) = 1 \Rightarrow$ da R^* con $n=4$ trovo $a_4 = -10/17$ per $n \geq 5$ tutti gli altri a_n (IN MODO UNIVOCO)

20. 1 punto

Se si cerca una soluzione con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$, allora si ha:
(si segni la risposta corretta tra le seguenti)
(a) la soluzione esiste ed è unica;
(b) la soluzione esiste ma non è unica;
(c) la soluzione non esiste.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- (b)
- X (c)

21. 1 punto

Se si cerca una soluzione con le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 24$ allora si ha:
(si segni la risposta corretta tra le seguenti)
(a) la soluzione esiste ed è unica;
(b) la soluzione esiste ma non è unica;
(c) la soluzione non esiste.

Contrassegna solo un ovale.

- (a)
- X (b)
- (c)

22. 1 punto

Se si cerca una soluzione con la condizione iniziale $y^{(5)}(0) = 1$, allora si ha:
(si segni la risposta corretta tra le seguenti)

(a) la soluzione esiste ed è unica;
(b) la soluzione esiste ma non è unica;
(c) la soluzione non esiste.

Contrassegna solo un ovale.

- [x] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)

23. 3 punti

Si scriva esplicitamente una soluzione dell'equazione con la condizione iniziale $y^{(4)}(0) = 0$, oppure si scriva "non esiste".

$y(x) = 24x + 6x^2 + 5x^3$

24. 1 punto

Si scriva il raggio di convergenza della soluzione con condizione iniziale $y^{(5)}(0) = 1$ (quella del punto (c)), oppure si scriva "non esiste".

$R = 2$

← uso il criterio di Cesaro

$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ da R^*

Esercizio Cinque

Se calcolo $B = A + I$ $(= A - \lambda I$ con $\lambda = -1)$ trovo

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

B ha rango 2 (si vede...)

$\Rightarrow$ Ker B ha dim 1 $\Rightarrow m_G(-1) = 1$

• Cerco $\bar{Y}(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{Y}' = 0$. Se $\bar{Y}$ risolve allora

$$0 = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} 2a + 2b - 3c = 4 \\ a + b - c = 2 \\ a + 2b - 2c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b - 3c = 4 \\ -c = 0 \\ -2b + c = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{c = 0 \quad b = 1 \quad a = 1}$$

$$\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

• Cerco $Y(t) = \bar{Y}(t) + Y_0(t)$. Dato che $Y(0) = \bar{Y}(0) + Y_0(0)$ allora $Y_0(0) = Y(0) - \bar{Y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

• Trovo la forma di Jordan per A. Dato B come sopra ho

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Cerco e_3 con $B^2 e_3 = 0$ e $Be_3 = e_2 \neq 0$. Vedo che

$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ANNULLA B^2 e $B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

• INFINE PRENDO e_1 con $(A - I)e_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}^{e_1} = 0$ Posso prendere

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

DUNQUE $A = M J M^{-1}$ con $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow Y_0(t) = M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} M^{-1} Y(0) = M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

(in fatti: $Y(0) = e_3 \Rightarrow M^{-1} Y(0) = \hat{e}_3$)

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+1 \end{bmatrix}$$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -2x & -2y + 3z & +4 \\ y' = -x & -y + z & +2 \\ z' = -x & -2y + 2z & +3 \end{cases}$$

che può essere scritto nella forma

$$Y' = AY + B(t)$$

dove

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diamo per buono che il polinomo caratteristico di A è $p(\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$.

25. 1 punto

Si dica quanto fa la molteplicità geometrica dell'autovalore -1.

1

26. 3 punti

Si trovi una soluzione costante $\bar{Y}$ per il sistema - oppure si scriva "non esiste"

$x(t) = 1$
$y(t) = 1$
$z(t) = 0$

27. 5 punti

Si trovi la soluzione del sistema con condizione iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$.

$x(t) = 1 + t e^{-t}$
$y(t) = 1 + (1+t) e^{-t}$
$z(t) = (1+t) e^{-t}$