NOME: [ ] COGNOME: [ ] MATR.: [ ]

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino C del 24 aprile 2021

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

Inizio Test

1. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{16+3^n n^4} x^n$ e sia R il corrispondente raggio di convergenza.

1. Si calcoli R. 3
2. Si dica quale dei seguenti intervalli coincide con l'insieme delle x per cui la serie converge.

   $(a)\quad]-R,R[\qquad (b)\quad [-R,R[\qquad (c)\quad]-R,R] \qquad (d)\quad [-R,R]$

3. Si dica se la serie converge uniformemente su $[-R,R]$. $\boxed{SI}$
4. Si calcoli $f''(0)$ (oppure si scriva "non esiste"). $= 1/20$

se $a_n = \frac{n^2}{16+3^n n^4} \Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{3^n n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{3} \Rightarrow R=3$

- se $x = \pm 3 \Rightarrow |a_n||3|^n \leq \frac{1}{n^2}$ sommabile.
- Più in generale se $|x| \leq 3$ $|a_n x^n| \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \|f_n\|_{\infty,[-3,3]} \leq \frac{1}{n^2}$

$f^{(2)}(0) = 2!\,a_2 = 2\frac{2^2}{16+3^2 2^4} = \frac{8}{16+9\cdot 16} = \frac{1}{20}$

2. Si consideri la seguente serie trigonometrica complessa: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} e^{2int}$.

1. Si scriva il periodo di f. $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$
2. Si dica se f è reale. NO $c_{-n} \neq \overline{c_n}$ $(= -c_n)$
3. Si dica se f è pari. NO $c_{-n} = c_n$
4. Si dica quali delle seguenti espressioni mi dà l'energia di f:

(a) $\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

(b) $\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^4}$

(c) $\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^4}$

~~(d)~~ $\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{1+2n^2+n^4}$

(e) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{1+2n^2+n^4}$

(f) $\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+2n^2+n^4}$

(g) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^4}$

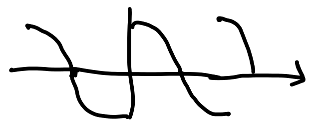
(h) $\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+2n^2+n^4}$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{1}{\pi} \sum \frac{n^2}{1+2n^2+n^4}$$

3. Si consideri la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x - \pi)^2$$

e il problema differenziale con dato nullo al bordo:



$$\begin{cases} y'' + 4y = f & \text{su }]0, \pi[\\ y(0) = y(\pi) = 0 & . \end{cases} \tag{P}$$

Indichiamo anche con u_n i coefficienti dello sviluppo di Fourier di f in soli seni sull'intervallo $[0, \pi]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx). \tag{$\mathcal{F}$}$$

1. Si calcolino gli u_n. $u_n = 2\frac{\pi}{n} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1)$
2. Si dica se in $(\mathcal{F})$ la convergenza della serie a f è uniforme (su $[0, \pi]$). No
3. Si motivi brevemente la risposta al punto precedente.
4. Si dica quale tra le seguenti affermazione è corretta:
   (a) (P) ha una soluzione unica;
   (b) (P) ha soluzione, ma non unica;
   $\cancel{(c)}$ (P) non ha soluzione.
5. Si motivi brevemente la risposta al punto precedente.

$$\frac{\pi}{2}u_n = \int_0^\pi (x-\pi)^2 \sin(nx)\,dx = \left[(x-\pi)^2 \frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi (x-\pi)\cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\Big[\underbrace{(x-\pi)\frac{\sin(nx)}{n}}_{=0}\Big]_0^\pi - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^2}\left[\frac{\cos(nx)}{-n}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{n} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3}$$

$$y = \sum y_n \sin nt \Rightarrow y'' = \sum -n^2 y_n \sin nt$$

$$(4 - n^2)\,y_n = u_n \qquad \text{se } n = 2 \Rightarrow u_2 = 0 \quad \boxed{\text{NO}}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare (non omogenea):

$$(x^2+2x)y'' + (4x-6)y' + 2y = -24 + 120x^3 \qquad (\mathcal{E})$$

1. Se imponiamo la condizione $y(0)=0$, $y'(0)=0$, allora:
   (a) $(\mathcal{E})$ ha un'unica soluzione;
   (b) $(\mathcal{E})$ ha più di una soluzione;
   ~~(c)~~ $(\mathcal{E})$ non ha nessuna soluzione.
2. Se imponiamo la condizione $y(0)=0$, $y'(0)=4$, allora:
   (a) $(\mathcal{E})$ ha un'unica soluzione;
   ~~(b)~~ $(\mathcal{E})$ ha più di una soluzione;
   (c) $(\mathcal{E})$ non ha nessuna soluzione.
3. Se imponiamo la condizione $y(0)=0$, $y^{(4)}(0)=6$, allora:
   ~~(a)~~ $(\mathcal{E})$ ha un'unica soluzione;
   (b) $(\mathcal{E})$ ha più di una soluzione;
   (c) $(\mathcal{E})$ non ha nessuna soluzione.

$y(x) = 4x + 3x^2 + 6x^3$

4. Si trovi (oppure si scriva "non esiste") una soluzione di $(\mathcal{E})$ tale che $y^{(4)}(0)=0$.

$$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$y''(x) = \sum_0^\infty a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$(x^2+2x)y'' + (4x-6)y' + 2y =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ n(n-1)a_n + 2(n+1)n a_{n+1} + 4n a_n - 6(n+1)a_{n+1} + 2a_n \right\} x^n =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \left\{ (n+1)(2n-6)a_{n+1} + (n^2-n+4n+2)a_n \right\} x^n =$$

$n^2+3n+2=0 \iff n = \dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = -\dfrac{3\pm1}{2} = \begin{cases}-1\\-2\end{cases}$

$$\sum (n+1)\left\{ 2(n-3)a_{n+1} + (n+2)a_n \right\} x^n$$

$$(R) \quad (n+1)\left(2(n-3)a_{n+1} + (n+2)a_n\right) = b_n = \begin{cases} -24 & n=0 \\ 120 & n=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$n=3 \rightarrow \quad 4\cdot5 a_3 = 120 \iff \boxed{a_3 = 6}$

$n=2 \quad 2(-1)a_3 + 4a_2 = 0 \iff \boxed{a_2 = 3}$

$n=1 \quad 2(-2)a_2 + 3a_1 = 0 \iff \boxed{a_1 = 4}$

$n=0 \quad 2(-3)a_1 + 2a_0 = -24$

$-24 + 2a_0 = -24 \qquad \boxed{a_0 = 0}$

5. Si consideri l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e campi $\vec{f_1}/\vec{f_2}/\vec{f_3} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4\right\},$$
$$\vec{f_1}(x,y) := \frac{y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}, \qquad \vec{f_2}(x,y) := \frac{x\vec{\mathbf{i}} - y\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}, \qquad \vec{f_3}(x,y) := \frac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}.$$

1. $\vec{f_1}$ è conservativo. NO
2. $\vec{f_2}$ è conservativo. NO
3. $\vec{f_2}$ è radiale. NO
4. $\vec{f_3}$ è irrotazionale. SI

6. Si considerino il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$\vec{f}(x, y) := (3x + 2y)\vec{\mathbf{i}} + (2x - 3y)\vec{\mathbf{j}} \qquad \gamma(t) := t\left(\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}}\right).$$

Si calcoli

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Fine Test

$$F(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2$$

$$\gamma(0) = 0 \quad \gamma(2\pi) = 2\pi$$

$$\Big[F(\gamma(t))\Big]_{t=0}^{t=1} = \frac{3}{2}(2\pi)^2 = 6\pi^2$$