NOME: ______ COGNOME: ______ MATR.: ______

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 10 aprile 2021

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
· il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
· `Pi` per π;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 45 minuti)

Inizio Test

1. Consideriamo una funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e supponiamo che f sia integrabile in senso improprio secondo Riemann. Si dica quale delle seguenti affermazioni è corretta.

(a) f è integrabile secondo Lebesgue (senza dover chiedere altre ipotesi).

(b) f è integrabile secondo Lebesgue se e solo se $f \geq 0$.

(c) f è integrabile secondo Lebesgue se e solo se f^+ è integrabile in senso improprio secondo Riemann.

~~(d)~~ f è integrabile secondo Lebesgue se e solo se $|f|$ è integrabile in senso improprio secondo Riemann.

(e) nessuna delle precedenti.

2. Consideriamo l'insieme $M \subset \mathbb{R}^3$ definito da:

$$M := \{(x, y, z) : xyz = 1, e^x + e^y = 2ez\}$$

e il punto $P_0 := (1, 1, 1)$. È facile vedere che $P_0 \in M$. Inoltre usando il Teorema del Dini si può verificare che, vicino a P_0 M si descrive come il sostegno di una curva regolare γ della forma $\gamma(t) = (t, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ (in altri termini $\gamma_1(t) = t$), dove $t \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$, per $\epsilon > 0$ piccolo.

Si calcoli il vettore $\gamma'(1)$.

Se $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz-1 \\ e^x+e^y-2ez \end{pmatrix}$ $\quad (V = \{G=0\})$ allora

$\frac{\partial G}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} yz, & xz, & xy \\ e^x, & e^y, & -2e \end{bmatrix}$ $\quad \frac{\partial G}{\partial(x,y,z)}(P_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & e & -2e \end{bmatrix}$

Detto g la funzione $g(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ z(x) \end{bmatrix}$ fornita dal Dini $\left(\frac{\partial G}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e & -2e \end{bmatrix} \text{ è ok!}\right)$

$\Rightarrow g'(1) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e & -2e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix} = -\frac{1}{-2e-e} \begin{bmatrix} -2e & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix} = \frac{1}{3e} \begin{bmatrix} -2e-e \\ 0 \end{bmatrix}$

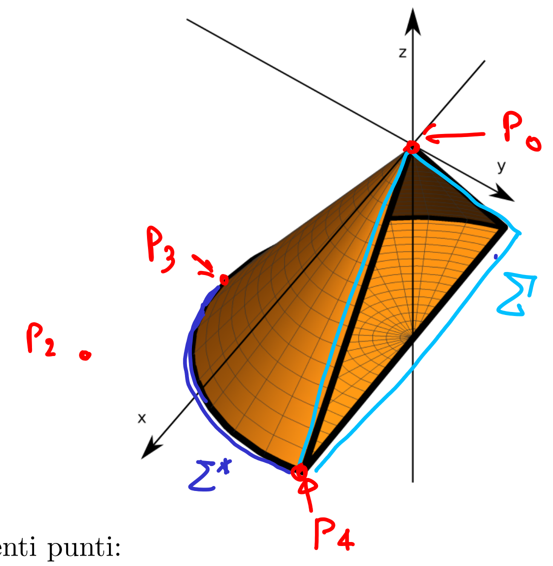
$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ cioè $y'(1) = -1$ $z'(1) = 0$. Ne segue

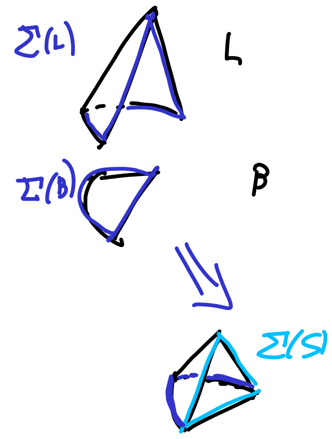
$\boxed{\gamma'(1) = (1, -1, 0)}$

3. Si considerino il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$\vec{f}(x, y, x) = 7x^3z^2\vec{\mathbf{i}} + 7y^3z^2\vec{\mathbf{j}} + 5z^3\vec{\mathbf{k}} \quad , \qquad S := B \cup L$$

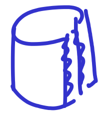
dove: $L := \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 = z^2, y \leq 0, -1 \leq z \leq 0\}$, $\quad B := \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0, z = -1\}$.





Si considerino inoltre i seguenti punti:

$$P_1 := (0, 0, 0), \qquad P_2 := (1, -1, -1), \qquad P_3 := (0, -1, -1), \qquad P_4 := (1, 0, -1),$$



1. Si dica quale affermazione è corretta:
   - **(a)** $P_1 \in \Sigma(S)$;
   - **(b)** $P_1 \in \Sigma^*(S) \setminus \Sigma(S)$;
   - **(c)** $P_1 \in S \setminus \Sigma^*(S)$;
   - **(d)** $P_1 \notin S$.
2. Si dica quale affermazione è corretta:
   - **(a)** $P_2 \in \Sigma(S)$;
   - **(b)** $P_2 \in \Sigma^*(S) \setminus \Sigma(S)$;
   - **(c)** $P_2 \in S \setminus \Sigma^*(S)$;
   - **(d)** $P_2 \notin S$.
3. Si dica quale affermazione è corretta:
   - **(a)** $P_3 \in \Sigma(S)$;
   - **(b)** $P_3 \in \Sigma^*(S) \setminus \Sigma(S)$;
   - **(c)** $P_3 \in S \setminus \Sigma^*(S)$;
   - **(d)** $P_3 \notin S$.
4. Si dica quale affermazione è corretta:
   - **(a)** $P_4 \in \Sigma(S)$;
   - **(b)** $P_4 \in \Sigma^*(S) \setminus \Sigma(S)$;
   - **(c)** $P_4 \in S \setminus \Sigma^*(S)$;
   - **(d)** $P_4 \notin S$.
5. Si calcoli il flusso:

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iint_S \left(7x^3z^2\vec{\mathbf{i}} + 7y^3z^2\vec{\mathbf{j}} + 5z^3\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \hat{\nu}\, d\sigma. \qquad \boxed{= \frac{9}{4}\pi}$$

   dove la normale $\hat{\nu} = \hat{\nu}_1\vec{\mathbf{i}} + \hat{\nu}_3\vec{\mathbf{j}} + \hat{\nu}_3\vec{\mathbf{k}}$ ha componente $\hat{\nu}_3 > 0$ su L e $\hat{\nu}_3 = -1$ su B.
6. Se $\hat{\nu}$ è la stessa del punto precedente si calcoli il flusso:

$$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iint_L \left(7x^3z^2\vec{\mathbf{i}} + 7y^3z^2\vec{\mathbf{j}} + 5z^3\vec{\mathbf{k}}\right) \cdot \hat{\nu}\, d\sigma. \qquad \boxed{= -\frac{\pi}{4}}$$

(5) Si ha $\operatorname{div}\vec{f} = 21x^2z^2 + 21y^2z^2 + 15z^3 = 3z^2(7(x^2+y^2)+5)$

Chiamo $D = \{ x^2+y^2 \leq z^2, \; y \leq 0 \; -1 \leq z \leq 1\}$

Allora $\partial D = B \cup L \cup C = S \cup C$ dove

$C = \{ x^2 \leq z^2, \; y=0, \; -1 \leq z \leq 1\}$

Notiamo che su C la normale esterna a D è $\vec{j}$ mentre su S $\hat{\nu}$ coincide con quella assegnata. Inoltre

$$\iint_C \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_C f_3 \, d\sigma = 0$$

perché su C $y=0$ e $f_3(x,0,y)=0$. Dunque

$$\iint_D \operatorname{div} f \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$$

$$\| $$

$$\iiint_D 3z^2(7(x^2+y^2)+5)\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(coordinate cilindriche)}$$

$$\| $$

$$3\int_{-1}^{0} z^2 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^{|z|} (7\rho^2+5)\rho\, d\rho \right) d\theta \right) dz =$$

$$3\pi \int_{-1}^{0} z^2 \left[7\frac{\rho^4}{4} + 5\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{|z|} dz = \frac{3}{4}\pi \int_{-1}^{0} (7z^6 + 10z^4)\, dz =$$

$$\frac{3\pi}{4}\Big[z^7 + 2z^5 \Big]_{-1}^{0} = \frac{9\pi}{4}$$

(6) Noto che, se $(x,y,z) \in B \Rightarrow f_3(x,y,z) = f_3(x,y,-1) = -5$

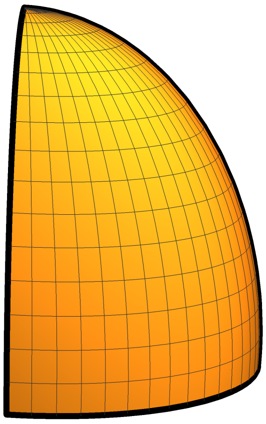
$$\Rightarrow \iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_B \vec{f}\cdot(-\vec{k})\, d\sigma = \iint_{\left\{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ y \leq 0}\right\}} 5\, dx\,dy = 5\,\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \iint_L \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma - \iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \frac{9}{4}\pi - \frac{5}{2}\pi = -\frac{\pi}{4}$$

4. Si considerino gli insiemi

$$V := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\right\}$$

$$W := \{(x,y,z) \in V \ : \ x = 0\} \cup \{(x,y,z) \in V \ : \ y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in V \ : \ z = 0\}$$



e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y,z) := xyz.$$

1. I punti di W sono tutti stazionari vincolati per f su V $\boxed{\text{SI}}$
2. Si motivi brevemente la risposta data al punto precedente. Su W $f \equiv 0$
3. Si dica QUANTI sono i punti stazionari vincolati P per f su V tali che $P \in V$, ma $P \notin W$ (per rispondere alla domanda è necessario calcolare questi punti, anche se non è richiesto scrivere questi punti nella risposta - basta dire quanti sono). 1 PUNTO
4. Si trovi il MINIMO di f su V. MIN = 0
5. Si trovi il MASSSIMO di f su V. MAX $= \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) Su $V \setminus W$ i pti critici si ottengono dal sistema (con 1 moltiplicatore)

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x \\ xy = \lambda 2y/4 \\ xy = \lambda 2z/9 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0 \end{cases}, x>0, y>0, z>0$$

MOLTIPLICO LA I° RIGA per x, II RIGA per y, III RIGA per z e sommo $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} xyz &= 2\lambda\ x^2 \\ xyz &= 2\lambda\ y^2/4 \\ xyz &= 2\lambda\ z^2/9 \\ \hline 3xyz &= 2\lambda \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} yz = 3x^2yz \\ xy = 3xy^2z/4 \\ xz = 3xyz^2/9 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad x>0 \\ y>0 \ z>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x^2 &= 1/3 \\ y^2 &= 4/3 \\ z^2 &= 9/3 \\ x>0, &\ y>0, z>0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ C'E' SOLO $P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ (UN PUNTO) su cui f vale

$f(P) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

4/5 - Dato che su W f vale zero $\Rightarrow$ MAX $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ MIN $= 0$

VOLENDO SI PUÒ DIM. CHE I PTI DI W sono critici usando i moltiplicatori. Facciamo il conto su $W_x = \{P \in V : x = 0\}$

$$f(x,y,z) = xyz \qquad G(x,y,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1$$

$$H(x,y,z) = -x$$

Se mi metto su $W_x = \{ P \in V \text{ con } x = 0,\ y>0,\ z>0 \}$

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla G + \mu \nabla H \\ H = 0 \quad G = 0 \\ y>0 \quad z>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu(-1) \\ xz = \lambda \frac{2y}{4} + \cancel{\mu(0)} \\ xy = \lambda \frac{2z}{9} + \cancel{\mu(0)} \\ x = 0 \quad G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} yz = \mu \\ 0 = \lambda \\ 0 = \lambda \\ x = 0,\ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0 \end{cases} \Leftarrow \text{ SONO TUTTE SOL.}$$

$P = (x,y,z) \in W$ UNA COMPONENTE DI $P = 0$

$\Rightarrow f(P) = 0$. f è nulla su W

$\Rightarrow$ tutti i pti di W sono critici in W

($\Rightarrow$ sono critici ~~per~~ f su V)

5. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare e omogenera:

$$x(1-x)y'' + (2x-4)y' + 4y = 0$$

Diamo per buono che le soluzioni si possono esprimere come serie di potenze in x, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dunque per rispondere alle domande che seguono si devono cercare delle condizioni sugli a_n.

Notiamo che, per la linearità, l'insieme delle soluzioni forma uno spazio vettoriale (i cui elementi sono delle funzioni).

1. Si scriva una relazione ricorsiva sugli a_n equivalente al fatto che $y(x)$ è soluzione dell'equazione.
2. Si individui la risposta corretta:
   (a) Lo spazio delle soluzioni ha dimensione zero (cioè l'unica soluzione è la funzione nulla);
   (b) Lo spazio delle soluzioni ha dimensione uno;
   ~~**(c)**~~ Lo spazio delle soluzioni ha dimensione due.
3. Se cerchiamo una soluzione y dell'equazione con i dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, allora:
   ~~**(a)**~~ la soluzione non esiste;
   (b) la soluzione esiste ed è unica;
   (c) la soluzione esiste ma non è unica;
4. Se cerchiamo una soluzione y dell'equazione con i dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, allora:
   (a) la soluzione non esiste;
   (b) la soluzione esiste ed è unica;
   ~~**(c)**~~ la soluzione esiste ma non è unica;
5. Se cerchiamo una soluzione y dell'equazione con i dati iniziali $y(0) = 1$, $y^{(5)}(0) = 0$, allora:
   (a) la soluzione non esiste;
   ~~**(b)**~~ la soluzione esiste ed è unica;
   (c) la soluzione esiste ma non è unica;

Se $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ (o $n=0$) $= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$, $y'' = \sum_{n=2} n(n-1)a_n x^{n-2}$ (o $n=1$, o $n=0$)

$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\,a_{n+1} x^{n-1}$ (o $n=0$) $= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ ← NON SERVE QUI

$$\Rightarrow (x-x^2)y'' + (2x-4)y' + 4y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big((n+1)n\,a_{n+1} - n(n-1)a_n + 2n a_n - 4(n+1)a_{n+1} + 4a_n\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_{n+1}(n^2-3n-4) - a_n(n^2-3n-4)\Big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n-4)(a_{n+1}-a_n)x^n$$

Perché valga l'eq. IMPONGO $(n+1)(n-4)(a_{n+1}-a_n) = 0 \iff$ ($n+1>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$)

(R) $(n-4)(a_{n+1}-a_n) = 0 \iff$

$a_{n+1} = a_n \quad \forall n \neq 4.$

- DUNQUE POSSO ASSEGNARE ARBITRARIAMENTE a_0 e a_5 $\Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni HA DIM 2.
- Se IMPONGO $y(0)=0$ $y'(0)=1$ $\Rightarrow a_0 = 0$ $a_1 = 1$ IMPOSSIBILE da R con $n=0$
- Se IMPONGO $y(0)=0=y'(0)$ TROVO che la (R) non è contraddetta e ottengo $a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=0$. Però posso mettere a_5 a piacere $\Rightarrow$ la sol. $\exists$ non unica.
- Se invece assegno a_0 e a_5 la sol. $\exists$ UNICA

6. Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -2x + y - t \\ y' &= -7x + 3y + z + 1 - 3t \\ z' &= -x + 2z \end{cases} \qquad \text{(Sys)}$$

che si può scrivere come $Y' = AY + B$ dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -t \\ 1-3t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Diamo per buono che vale la formula:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{M^{-1}} .$$

1. La matrice A
   - (a) ha tre autovalori distinti;
   - (b) ha due autovalori distinti entrambi con molteplicità geometrica 1;
   - (c) ha due autovalori distinti di cui uno con molteplicità geometrica 2;
   - ~~(d)~~ ha un solo autovalore con molteplicità geometrica 1; $(\lambda = 1)$
   - (e) ha un solo autovalore cone molteplicità geometrica 2;
   - (f) ha un solo autovalore con molteplicità geometrica 3;
2. Si trovi una soluzione di (Sys) della forma $\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} at \\ bt \\ ct \end{bmatrix}$ (con $a, b, c \in \mathbb{R}$ da determinare), o si scriva "non esiste" $\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$
3. Si trovi la soluzione $Y(t)$ di (Sys) **tale che** $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 2$.
   Suggerimento: si cerchi $Y(t)$ come somma $Y(t) = \bar{Y}(t) + Y_0(t)$; in questo modo Y_0 è soluzione di $Y' = AY$ – si cerchi di trovare la forma di Jordan di A e applicare la formula risolutiva per quest'ultimo problema.

Fine Test

(2) Se $\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} t \Rightarrow \bar{Y}' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e $A\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} -2a + b \\ -7a + 3b + c \\ -a \quad + 2c \end{bmatrix} t$

se impongo l'eq. $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a + b \\ -7a + 3b + c \\ -a \quad + 2c \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

NE RICAVO SEI CONDIZIONI: $a = 0, b = 1, c = 0, -2a + b - 1 = 0, -7a + 3b + c - 3 = 0, -a + 2c = 0$
che però sono verificate tutte se $a = 0$ $b = 1$ $c = 0$.

(3) Per trovare Y cerco Y_0 sol. di $Y_0' = AY_0$ con $Y_0(0) = Y(0) - \underbrace{\bar{Y}(0)}_{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\hat{e}_3$

$\Rightarrow Y_0(t) = 2 M e^{tJ} M^{-1} \hat{e}_3$. Si vede che $M \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \Leftrightarrow M^{-1} \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \Rightarrow$

$$Y_0(t) = 2 e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t M \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \\ 2 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} t^2 + 2t \\ 3t^2 + 2t \\ t^2 + 2t + 2 \end{bmatrix}$$

e alla fine $Y(t) = e^t \begin{bmatrix} t^2 + 2t \\ 3t^2 + 2t \\ t^2 + 2t + 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$