# Test di Analisi 2 del 4/7/20 (secondo appello estivo)

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.
*Campo obbligatorio

1. Email *

2. Cognome *

Istruzioni di compilazione: Si usi:
· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per $2^3$;
· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per $a_n$;
· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per $e^2$;
· `Pi` per $\pi$;
· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi di tutti i **4** esercizi fa **40**.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO

3. Nome *

4. Matricola *

5. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

## Esercizio Uno

Si consideri l'insieme $D$ in $\mathbb{R}^3$ definito da

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Diamo per buono che $\partial D$ è una superficie regolare a tratti. Nel seguito $\hat{\nu}(P)$ indica la normale unitaria uscente da $D$ in un punto generico $P = (x, y, z)$ di $\partial D \setminus \Sigma^*(\partial D)$.
Consideriamo inoltre il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}} + (z - 2)\vec{\mathbf{k}}$$

6. 1 punto

(a) La frontiera $\partial D$ è l'unione $A \cup B \cup C$ dove (1 p.):

(a) $A = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 = z^2\}$, $B = \{x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\}$, $C = \{x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 2\}$.
(b) $A = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, z = 2\}$, $B = \{x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 2\}$, $C = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$.
(c) $A = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, z = 2\}$, $B = \{x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\}$, $C = \{x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 2\}$,
(d) $A = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 = z^2\}$, $B = \{x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 2\}$, $C = \{x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

*Contrassegna solo un ovale.*

- (a)
- (b)
- (c)
- (d)
- nessuna delle precedenti

7. 1 punto

(b.1) Sia $P := (1, -1, 2)$. Si calcoli $\nu(P)$ nel caso in cui $\nu(P)$ esista o si scriva "non esiste" in caso contrario (1p.):

$(0, 0, 1)$

8. 1 punto

(b.2) Sia $P := (-1, 0, 1)$. Si calcoli $\nu(P)$ nel caso in cui $\nu(P)$ esista o si scriva "non esiste" in caso contrario (1p.):

NON ESISTE

9. 1 punto

(b.3) Sia $P := (0, -1, 3/2)$. Si calcoli $\nu(P)$ nel caso in cui $\nu(P)$ esista o si scriva "non esiste" in caso contrario (1p.):

$(0, 1, 0)$

10. 1 punto

Si calcoli la divergenza di $\vec{f}$ (1p.)

1

11. 2 punti

(d.1) Si calcoli il flusso $\Phi(\vec{f}, A, \hat{\nu}) = \iint_A \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$ di $\vec{f}$ attraverso $A$ ($\hat{\nu}$ è quella indicata sopra) (2p.)

0

12. 2 punti

(d.2) Si calcoli il flusso $\Phi(\vec{f}, C, \hat{\nu}) = \iint_C \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$ di $\vec{f}$ attraverso $A$ ($\hat{\nu}$ è quella indicata sopra) (2p.)

0

13. 4 punti

(d.3) Si calcoli il flusso $\Phi(\vec{f}, B, \hat{\nu}) = \iint_B \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$ di $\vec{f}$ attraverso $A$ ($\hat{\nu}$ è quella indicata sopra) (4p.)

$\frac{4}{3}\pi$

## Esercizio Due

Si considerino la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $Q \subset \mathbb{R}^2$ definiti da

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - xy, \qquad Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

14. 4 punti

(a) Si dica quali tra i seguenti punti (anche più di uno) è stazionario vincolato per $f$ si $D$ (4p.):

(a) $(1, 1/2)$ (b) $(1, -1/2)$ (c) $(1/2, 1/2)$ (d) $(1/2, 1)$

*Seleziona tutte le voci applicabili.*

- [x] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)
- [x] (d)

15. 1 punto

(b) Si scriva un punto stazionario vincolato $P$ diverso da quelli trovati al punto precedente (oppure "non esiste" se non ce ne sono altri) (1p.):

(0,0) (1,1) (-1,1) (-1,-1) (1,-1) (-1/2,-1) (-1,-1/2)

16. 1 punto

(c) Si dica se $f$ è convessa (2p.):

*Contrassegna solo un ovale.*

- [x] Sì
- [ ] No

17. 2 punti

(d) Si giustifichi brevemente la risposta (c) (2p.):

Hessiana $\geq 0$ su $\mathbb{R}^2$ (ADDIRITTURA $H_f > 0$)

## Esercizio Tre

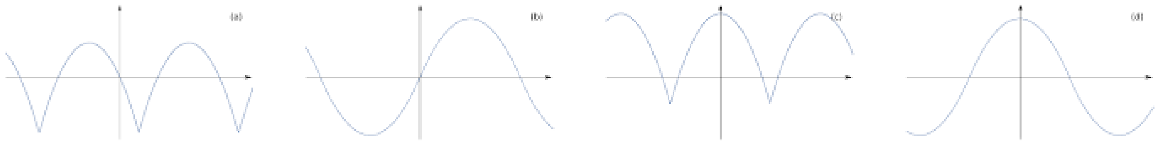
Si consideri la serie di Fourier:

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos(nt)$$

dove diamo per buono che la serie converge per ogni $t$ (convergenza puntuale su $\mathbb{R}$) e quindi ha senso chiamare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la somma della serie.

18. 2 punti

(a) Si dica quali tra i grafici seguenti può corrispondere a quello di $f$ (2p.).



*Contrassegna solo un ovale.*

- [ ] (a)
- [ ] (b)
- [ ] (c)
- [x] (d)
- [ ] nessuno di questi

19. 1 punto

(b) Si dica se la convergenza è uniforme (1p.)

*Contrassegna solo un ovale.*

- [x] Sì
- [ ] No

$$\sum \frac{1}{n^3} < +\infty$$

20. 1 punto

(c) Si dica se $f$ è derivabile (1p.)

*Contrassegna solo un ovale.*

$$\sum \frac{n}{n^3} = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$$

- [x] Sì
- [ ] No

21. 1 punto

(d) Si calcoli $f'(0)$ o si scriva "non esiste" se si è risposto "No" alla domada (c) (1p.)

0 ( $f$ è pari $\Rightarrow f'$ è dispari ( $f'$ esiste ) )

22. 3 punti

(e) Si motivi brevemente la risposta alle domande (b) e (c) (3p.)

$\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow$ f conv. unif.

$\sum n|a_n| < +\infty \Rightarrow$ la serie delle derivate conv. unif

(e la serie converge)

## Esercizio Quattro

Diamo per buono che la matrice $5 \times 5$ $A$ si fattorizzi come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -0,5 & 9 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

23. 1 punto

(a) Qual è la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 1$ (1p.):

4

24. 1 punto

(b) Qual è la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ (1p.):

2 (due blocchi

25. 2 punti

(c) Se $B = A - I$ si dica per quale esponente $h$ si ha $\mathrm{Ker}B^{h-1} \neq \mathrm{Ker}B^{h} = \mathrm{Ker}B^{h+1}$ (2p.):

3 (il blocco max ha dim 3)

26. 5 punti

(d) Si scriva la soluzione del sistema (5p.)

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dove } Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$Y(0) = e_3$ terza colonna di $M$

$$Y = e^{tA} Y(0) = M e^{tJ} M^{-1} e_3 = M e^{tJ} \hat{e}_3$$

$$M \left(\text{terza colonna di } e^{tJ}\right) = e^t \begin{bmatrix} t^2/2 + t \\ 2t \\ 1 \\ t^2/2 + 2t \\ 1 \end{bmatrix}$$

27. 2 punti

(e) Si scriva la soluzione del sistema $Y'(t) = AY(t)$ (2p.), con dato iniziale

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e_4 \text{ (è autovettore)}$$

$$Y(t) = M e^{tJ} \hat{e}_4 = M \left(\text{quarta colonna di } e^{tJ}\right) = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se $Y(0)$ è autovettore di autovalore $\lambda$

$$\Rightarrow Y(t) = e^{\lambda t} Y(0)$$

Questi contenuti non sono creati né avallati da Google.

Google Moduli