NOME: ______ COGNOME: ______ MATR.: ______

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 4 giugno 2020

Istruzioni di compilazione: Si usi:
lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
il carattere `^` per indicare la potenza `2^3` per 2^3;
`sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
`exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
`Pi` per π;
le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;

Inizio Test

1. Si consideri l'insieme V in $\mathbb{R}^3$ definito da $\{(x, y, z) : x + y + 2z = -1, xyz^2 = 0\}$.

(a) Si dica quali di questi punti appartengono a V (2p.):

(a) $P_0 = (0, -1, 1)$ (b) $P_0 = (1, 1, 0)$ (c) $P_0 = (1, 0, -1)$ (d) $P_0 = (-2, -1, 1)$.

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐

(b) Detto $P_0 = (X_0, Y_0, Z_0)$ il punto tra quelli sopra che si trova in V, si dica quali (anche più di una) tra le affermazioni seguenti è deducibile dal teorema del Dini (3p.):

(a) vicino a P_0 V è sostegno di una curva $\mathcal{C}^1$;
(b) vicino a P_0 V si descrive come $\{(x, f(x), g(x)) : x \text{ vicino a } X_0\}$ per opportune f, g di classe $\mathcal{C}^1$;
(c) vicino a P_0 V si descrive come $\{(f(y), y, g(y)) : y \text{ vicino a } Y_0\}$ per opportune f, g di classe $\mathcal{C}^1$;
(d) vicino a P_0 V si descrive come $\{(f(z), g(z), z) : z \text{ vicino a } Z_0\}$ per opportune f, g di classe $\mathcal{C}^1$.

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐

(c) Si dica quale dei seguenti vettori $\vec{T}$ è tangente a V nel punto P_0 (2p.):

(a) $\vec{T} = (2, -1, 0)$ (b) $\vec{T} = (-2, 0, 1)$ (c) $\vec{T} = (1, 0, -2)$ (d) $\vec{T} = (1, 1, -1)$

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐

2. Si considerino la funzione $f(x, y) := 3x^2 + 9y$ e l'insieme $M := \{4x^2 + 9y^2 = 36, x \geq 0\}$.

(a) Si dica quali dei seguenti punti è stazionario vincolato per f su M (3p.):

(a) $(0, 3)$ (b) $(2, 0)$ (c) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$ (d) $\left(-3, \frac{2}{3}\right)$

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐

(b) Ci sono altri punti stazionari (vincolati) per f su M (2p.)?

Sì ce ne sono ○ No non ce ne sono ○

(c) Ci sono punti stazionari per f nella parte interna di M(1p.)?

Sì ce ne sono ○ No non ce ne sono ○

(d) È possibile che il massimo di f su M faccia 18 (2p.)?

Sì ○ No ○

3. Siano $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ e $\vec{f} := xy(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$.

(a) Si calcoli la normale unitaria uscente da D nel punto $P_0 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ (2p.):

$$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{}\,\vec{i} + \boxed{}\,\vec{j} + \boxed{}\,\vec{k}$$

(b) Si calcoli la divergenza di $\vec{f}$ (1p.):

$$\mathrm{div}(\vec{f}) = \boxed{}$$

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ uscente da D attraverso ∂D (4p.):

$$\Phi(\vec{f}, \partial D, \hat{\nu}) = \boxed{}$$

(ν è la normale uscente).

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

con la stessa normale della domanda precedente (N.B. $S \subset \partial D$) (3p.):

$$\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu}) = \boxed{}$$

4. Supponiamo che la matrice 4×4 A si fattorizzi come segue:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

(a) Quali sono la molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore $\lambda = -1$ (1+2p.):

$$m_A(\lambda) = \boxed{} \qquad m_G(\lambda) = \boxed{}$$

(b) Se $B = A + I$ si dica per quale esponente h si ha $\mathrm{Ker}B^{h-1} \neq \mathrm{Ker}B^h = \mathrm{Ker}B^{h+1}$ (2p.):

$$h = \boxed{}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema (5p.)

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dove } Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ w(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \boxed{}$$
$$y(t) = \boxed{}$$
$$w(t) = \boxed{}$$
$$z(t) = \boxed{}$$

Fine Test