COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 22 febbraio 2020 - PARTE A

1. Si scriva la definizione di funzione differenziabile e di differenziale (2p.)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto $f:\Omega \to \mathbb{R}^M$ $x_0 \in \Omega$. Si dice che $f$ è differenziabile in $x_0$ se esiste una applicazione lineare $L:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$$

Se questo avviene si dice che $L$ è il differenziale di $f$ in $x_0$ e si scrive $L = df(x_0)$

2. Consideriamo la serie di Fourier $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^4}\cos(4nt)$. Si dica se (1 p. a risposta)

(a) $f$ (converge ed ) è continua su $\mathbb{R}$ ~~VERO~~ FALSO;

(b) $f$ (converge ed ) è derivabile su $\mathbb{R}$ ~~VERO~~ FALSO;

(c) $f$ è periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$

3. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := 1 + x^2 + 4xy + 3y^2$. Allora $(0,0)$ è punto di

minimo , massimo , ~~sella~~ , nessuna di queste (2p.).

4. Sia data una funzione derivabile $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dimostri che il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x,y) := \Phi(xy)(y\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}})$ è conservativo (3p.)

• Dato che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso basta dim. che $\vec{f}$ è irrotazionale:
$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\phi(xy)y = \phi'(xy)yx + \phi(x,y)$ ; $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\phi(xy)x = \phi'(xy)xy + \phi(x,y)$

SONO EGUALI!

OPPURE

• Dato che $\phi$ è continuo $\Rightarrow$ esiste una primitiva $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $\varphi' = \phi$ (per esempio $\varphi(t) = \int_0^t \phi(\tau)d\tau$). Se definisco $F(x,y) = \varphi(xy)$ vedo che $\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi'(xy)y = \phi(xy)y = f_1(x,y)$ ; $\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi'(xy)x = \phi(xy)x = f_2(x,y)$

DUNQUE $F$ è un potenziale per $\vec{f}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

   (a) Se $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e se $V := \{(x, y, z) \ : \ G(x, y, z) = 0\}$, allora $\partial V = V$.
   $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

   (b) Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e se per ogni $x, \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $f'(x)(\vec{v})$ esiste e $f'(x)(\vec{v}) = 0$, allora $f$ è continua in $\mathbb{R}^N$
   $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

   (c) Il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definito da $\vec{f}(x, y) := \dfrac{y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2}$ è irrotazionale. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

   (d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to [-\infty, \infty]$, definita da $f(x, y, z) = \dfrac{\sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2}$ per $(x, x, z) \neq (0, 0, 0)$ e da $f(0, 0, 0) := +\infty$, è integrabile sul disco $D := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

COMMENTI

(2) se $f = \sum a_m \cos(m\omega t)$ e $\sum |a_m| < +\infty \Rightarrow f$ è continua

se $\sum m|a_m| < +\infty \Rightarrow f$ è derivabile

IN QUESTO CASO $|a_m| \simeq \frac{1}{m^3}$ e $m|a_m| \simeq \frac{1}{m^2}$ entrambe sommabili

(3) L'Hessiano è $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ che ha determinante $< 0$

(5a) Se prendessi $G(x,y,z) = 0 \Rightarrow V = \mathbb{R}^3$ $\quad \partial V = \partial \mathbb{R}^3 = \emptyset \neq V$

(5b) È stato visto al corso che l'esistenza delle derivate direzionali non implica la continuità. Per es. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \end{cases}$

(5c) basta fare i calcoli.

(5d) Noto che $|f(x,y,z)| \le \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} =: g(x,y,z)$. Vedo che $g$ è integrabile passando a coordinate sferiche

$$\iiint_D g = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\rho^2} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^1 d\rho$$

$$= 4\pi$$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 22 febbraio 2020 - PARTE B Cognome/Nome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

1. Si considerino $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := 4x^2 - 10xy + y^2$ e $M := \{(x,y) : xy \geq 4, 0 \leq x+y \leq 5\}$. Si trovino il massimo e il minimo di $f$ su $M$ (6p.)

$\min_{x \in M} f(x) =$ $\boxed{-35}$ , $\max_{x \in M} f(x) =$ $\boxed{25}$

*Svolgimento*

$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 10y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -10x + 2y$. Considero le funzioni "di vincolo" $g_1(x,y) = xy$ $g_2(x,y) = x+y$. Cerco i punti estremali per $f$ su $M := \{ g_1(x,y) \geq 4 \quad 0 \leq g_2(x,y) \leq 5 \}$. DISTINGUO VARI CASI

(1) Punti critici interni $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x,y) = 0$ $g_1(x,y) > 4$ $0 < g_2(x,y) < 5$

$\begin{cases} 8x - 10y = 0 \\ -10x + 2y = 0 \\ xy > 4 \quad 0 < x+y < 5 \end{cases}$ L'UNICA SOL. è $(0,0)$ che non verifica le altre condizioni

(2) Punti critici con l'annullamento di un solo vincolo. MOLTIPLICATORI

(A) $\nabla f = \lambda \nabla g_1$, $g_1 = 4$ $0 < g_2 < 5$ $\leftrightarrow$ $\begin{cases} 8x - 10y = \lambda y \\ -10x + 2y = \lambda x \\ xy = 4 \quad 0 < x+y < 5 \end{cases}$ MOLTIPLICO LA I° per $x$ e la II° per $y$ e SOMMO $\Rightarrow$

$8x^2 - 10xy = \lambda xy = 4\lambda = -10xy + 2y^2 \Leftrightarrow 8x^2 = 2y^2 \Leftrightarrow y = \pm 2x$. MA se fosse $y = -2x \Rightarrow 4 = xy < 0$ IMPOSSIBILE. Metto $y = 2x$ in $xy = 4 \Rightarrow$ $2x^2 = 4 \Rightarrow$ $\boxed{x = \sqrt{2} \quad e \quad y = 2\sqrt{2}}$

(B) $\nabla f = \lambda \nabla g_2$, $g_1 > 4$ $g_2 = 5$ $\leftrightarrow$ $\begin{cases} 8x - 10y = \lambda \\ -10x + 2y = \lambda \\ xy > 4 \quad x+y = 5 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $8x - 10y = -10x + 2y \Leftrightarrow$ $18x = 12y \Leftrightarrow$ $3x = 2y$.

Metto a sistema con $x + y = 5$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = 2 \quad y = 3}$

(C) $\nabla f = \lambda \nabla g_2$, $g_1 > 4$ $g_2 = 0$ IMPOSSIBILE perché $x + y = 0 \Rightarrow x\, y$ discordi e non può essere $xy > 4$

(3) Punti in cui si annullano due vincoli $\Rightarrow$ $\begin{cases} xy = 4 \\ x+y = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x = 1 \quad y = 4}$ e $\boxed{x = 4 \quad y = 1}$. Non ci sono invece soluzioni di $\begin{cases} xy = 4 \\ x+y = 0 \end{cases}$

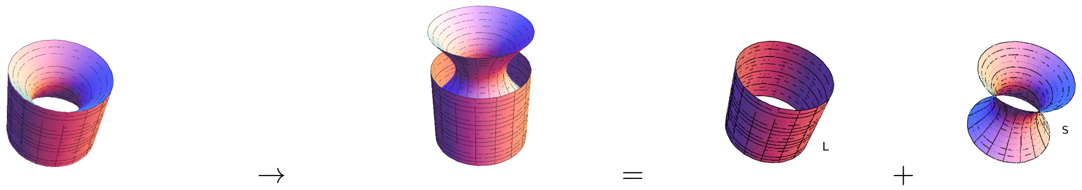
DEVO CALCOLARE $f$ in tutti questi punti sopra:

$f(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = -24$, $f(2,3) = -35$, $f(1,4) = -20$, $f(4,1) = 25$

MINIMO MASSIMO

$\nabla g = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 2z \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g. = 1 + z^2 - x^2 - y^2 \leq 0$

2. Sia $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \geq x^2 + y^2 \geq 1 + z^2\}$. $D$ è un dominio regolare a tratti ed è rappresentato di sotto:




In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera $\partial D$ scomposta nelle due superfici regolari $S$ ed $L$. Sia inoltre $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ il campo definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := 3xyz^2(y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}}) + 2z^3x^2\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

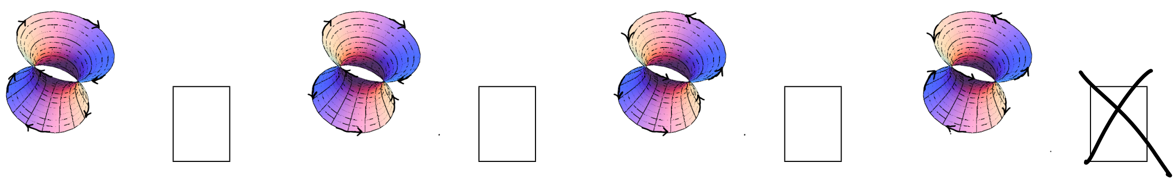
(a) Si scriva analiticamente il bordo di $S$ (1p.):

$\Sigma(S) = \boxed{\{\ x^2 + y^2 = 4 \ , z^2 = 3 \ \}} = \{x^2+y^2 = 4, z = \pm\sqrt{3}\}$

(b) Si scrivano le normali unitarie uscenti da $D$ nei punti $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ e $P_1 = (1, -1, -1)$ (0,5+0,5p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\ \vec{\mathbf{k}}$ $\qquad$ $\hat{\nu}(P_1) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}\ \vec{\mathbf{k}}$

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta la corretta orientazione di $\Sigma(S)$ quando su $L$ si considera la normale uscente da $D$ (0,5p.):



(d) Si calcolino, facendo vedere i passaggi principali, i seguenti flussi:

$\iint\limits_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{792}{35}\sqrt{3}\pi}$ (3 p.)

$\iint\limits_{S} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{792}{35}\sqrt{3}\pi}$ (1,5 p.)

*Svolgimento delle parte* (d)

Calcolo la divergenza di $\vec{f}$: $\quad \operatorname{div} \vec{f} = 3y^2z^2 - 3x^2z^2 + 6x^2z^2 = 3(x^2+y^2)z^2$

ALLORA $\iint\limits_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iiint\limits_{D} 3(x^2+y^2)z^2\, dx\, dy\, dz =$ (coord. cilindriche)

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{1+z^2}}^{2} 3\rho^2 z^2 \rho\, d\rho = 3 \cdot 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z^2 dz \int_{\sqrt{1+z^2}}^{2} \rho^3 d\rho = 6\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\sqrt{1+z^2}}^{2} dz$$

$$= \frac{3}{2}\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} z^2\left(16 - (1+z^2)^2\right) dz = 3\pi \int_0^{\sqrt{3}} z^2 (15 - 2z^2 - z^4)\, dz =$$

$$3\pi \left[15\frac{z^3}{3} - 2\frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7}\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi\sqrt{3}\left(\frac{15}{3} \cdot 3 - \frac{2}{5} \cdot 9 - \frac{27}{7}\right) = 3\sqrt{3}\pi\left(15 - \frac{126+135}{35}\right) = \frac{792\sqrt{3}\pi}{35}$$

Per il secondo flusso notiamo che se $(x,y,z) \in L$ allora

$\hat{\nu}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e allora $\vec{f}(x,y,z) \cdot \hat{\nu}(x,y,z) =$

$$\frac{3xyz^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \cdot \left(y\vec{i} - x\vec{j}\right) + 0 \cdot \vec{K} = 0 .$$

Dunque $$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \underbrace{\iint_{L} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma}_{=\,0} + \iint_{S} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma \iff$$

$$\iint_{S} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \frac{792}{35}\sqrt{3}\,\pi$$

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$x(8-x)y'' + 2(x-2)y' - 2y = 0$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

**(a)** Si trovi una relazione ricorsiva per gli $a_n$ (2p.):

$(\mathcal{R})$

$$a_{n+1} = \frac{(n-1)(n-2)}{4(n+1)(2n-1)} a_n \qquad \forall n$$

**(b)** Si dica, giustificando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 1$ e se è unica (2p.).

esiste unica | esiste non unica | non esiste

**(c)** Si mostri che esiste un'unica soluzione $y$ tale che $y'(0) = 48$ e la si calcoli esplicitamente (2p.).

$y(x) =$ $-96 + 48x$

*Svolgimento*

Prendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$ NE SEGUE,

$x(8-x)y'' + 2(x-2)y' - 2y =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 8(n+1)n a_{n+1} - n(n-1) a_n + 2n a_n - 4(n+1) a_{n+1} - 2 a_n \right\} x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{n+1} \left[ 8(n+1)n - 4(n+1) \right] - a_n \left[ n(n-1) - 2n + 2 \right] \right\} x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 4(n+1)(2n-1) a_{n+1} - a_n (n-1)(n-2) \right\} x^n .$

Perché valga l'equazione devo avere $4(n+1)(2n-1) a_{n+1} = (n-1)(n-2) a_n \quad \forall n$

Dato che $(n+1) \neq 0 \ \forall n$ e $2n-1 \neq 0 \ \forall n$ (n INTERO!) posso scrivere

$\mathcal{R} \qquad a_{n+1} = \frac{(n-1)(n-2)}{4(n+1)(2n-1)} a_n$

Peraltro se $n = 1$ TROVO $a_2 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 2$

e quindi $y = a_0 + a_1 x$. Se $n = 0$ $a_1 = -\frac{1}{2} a_0 \Rightarrow y = a_0 \left(1 - \frac{x}{2}\right)$

DUNQUE (b) se impongo $y(0) = 1$ TROVO $a_0 = 1 \Rightarrow y(x) = 1 - \frac{x}{2}$

che è unico

(c) Se impongo $y'(0) = 48$ TROVO $a_1 = 48 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} a_0 = 48$

$\Rightarrow a_0 = -96 \Rightarrow y(x) = -96 + 48x$

4. $\left(\boxed{\phantom{x}}\right.$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16$\left.\right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= 4y - 1 \\ y' &= -x + 4y + 1 \end{cases}$$

Chiamiamo $A$ la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di $A$ con le relative molteplicità algebriche e geometriche(1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{2}, m_A(\lambda_1) = \boxed{2}, m_G(\lambda_1) = \boxed{1}; \cancel{\lambda_2 = \boxed{\phantom{x}}, m_A(\lambda_2) = \boxed{\phantom{x}}, m_G(\lambda_2) = \boxed{\phantom{x}}}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per $A$e la relativa forma di Jordan(2p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{-2} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la matrice esponenziale relativa ad $A$(2p.):

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} \boxed{1-2t} & \boxed{4t} \\ \boxed{-t} & \boxed{1+2t} \end{pmatrix}$$

(d) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{e^{2t}(3t-2) + 2}$$

$$y(t) = \boxed{\frac{e^{2t}}{4}(6t-1) + \frac{1}{4}}$$

*Svolgimento*

$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. $P(\lambda) = -\lambda(4-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

$\Rightarrow \lambda = 2 \quad m_A = 2$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ non è nulla (e ha rango 1) $\Rightarrow m_G = 1$ e $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Cerco $e_2$ con $Be_2 \neq 0$, per esempio $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = Be_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Considero $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $e^{tA} = Me^{tJ}M^{-1} =$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & -1-2t \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$

$$e^{2t}\begin{bmatrix} -2t+1 & 2+4t-2 \\ -t & 1+2t \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{bmatrix}.$$

USANDO LA FORMULA RISOLUTIVA

$$Y(t) = e^{tA}\int_0^t e^{-\tau A}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^t e^{(t-\tau)A}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = (\sigma = t-\tau)$$

$$\int_0^t e^{\sigma A}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^t e^{2\sigma}\begin{bmatrix} 1-2\sigma & 4\sigma \\ -\sigma & 1+2\sigma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} d\sigma = \int_0^t e^{2\sigma}\begin{bmatrix} -1+6\sigma \\ 1+3\sigma \end{bmatrix} d\sigma =$$

$$\left[\frac{e^{2\sigma}}{2}\begin{bmatrix} 6\sigma-1 \\ 3\sigma+1 \end{bmatrix}\right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{2\sigma}}{2}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} d\sigma = \frac{e^{2t}}{2}\begin{bmatrix} 6t-1 \\ 3t+1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left[\frac{e^{2\sigma}}{4}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}\right]_0^t =$$

$$\frac{e^{2t}}{2}\begin{bmatrix} 6t-1 \\ 3t+1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{e^{2t}}{4}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

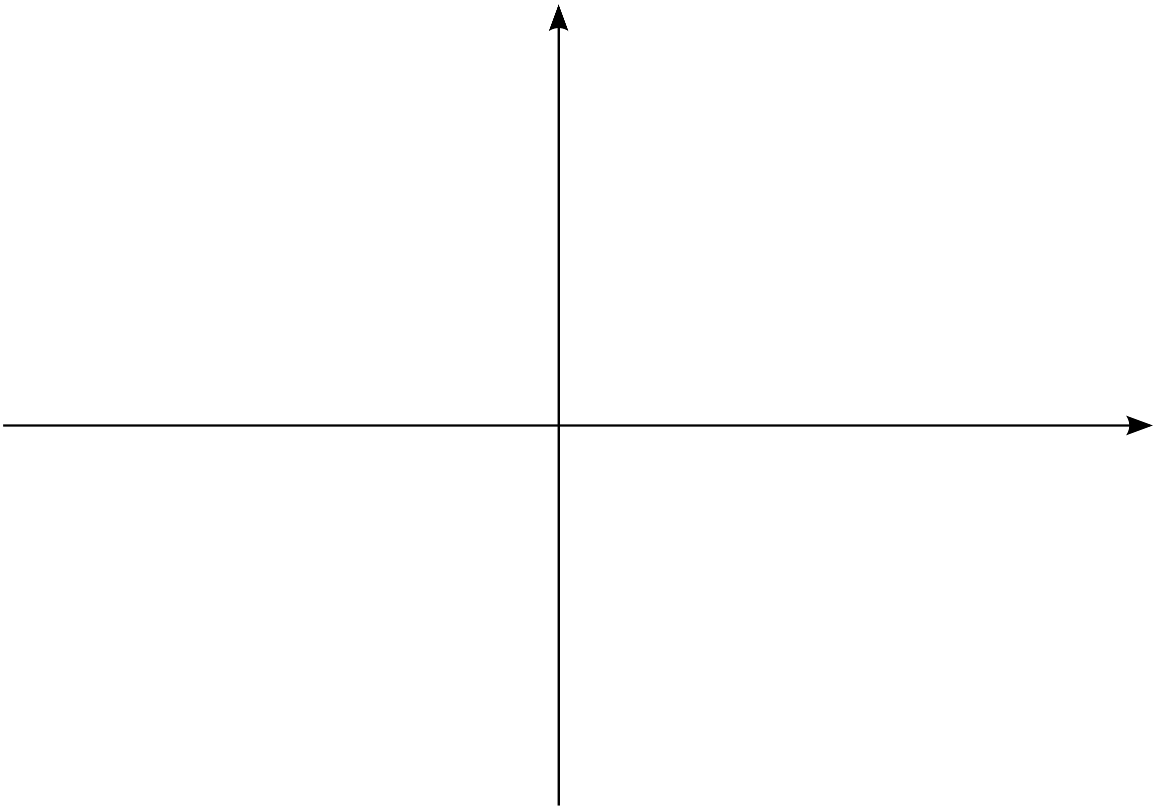
$$\frac{e^{2t}}{4}\begin{bmatrix} 12t-2-6 \\ 6t+2-3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+6 \\ -2+3 \end{bmatrix} = \frac{e^{2t}}{4}\begin{bmatrix} 12t-8 \\ 6t-1, \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Variante esercizio 3 della seconda parte: solo gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{x(x^4 - y^2)}{y(x^2 - y^4)}$$

1. Si dica per quali $(x_0, y_0)$ vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti $(x_0, y_0)$ dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovi un integrale primo per l'equazione $\Phi$ (3p.).

$\Phi(x, y) =$

3. Si disegni nel diagramma della pagina precedente la soluzione $y(x)$ tale che $y(\sqrt{3/2}) = \sqrt{3/2}$ (1p.); detto $]\underline{x}, \overline{x}[$ l'intervallo massimale su cui tale $y$ è definita si ha (1p.):

$\underline{x} =$ $\qquad$ $\overline{x} =$

*Svolgimento*