COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 1 febbrario 2020 - PARTE A

1. Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$. Si trovi (1 p. a risposta)

   (a) il raggio di convergenza della serie: $R =$ $\boxed{e}$;

   (b) il valore di $f''(0) =$ $\boxed{1}$ / $\boxed{\text{non esiste}}$.

2. Siano $G(x, y, z) := e^{x-y+2z} - xyz$ e $M := \{(x, y, z) \,:\, G(x, y, z) = 1\}$: Allora (1p. a risposta):

   (a) Indicare quali di questi punti appartiene a M. $\boxed{(0, 1, 1)}$, $\boxed{(1, 0, 1)}$, $\boxed{(1, 1, 0)}$, $\boxed{(1, 1, 1)}$.

   (b) detto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ il punto indicato in (a), allora vicino a P_0 f è grafico di una funzione $z = f(x, y)$ di classe $\mathcal{C}^1$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$;

   (c) in caso di risposta affermativa a (b) si trovi $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =$ $\boxed{1}$.

3. Siano $\Omega := \{(x, y) \,:\, y > x\}$ e $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x, y) := \frac{\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}}{(x - y)^2}$. Si trovi (se esiste) un potenziale U per $\vec{f}$. (2p.)

$$U(x, y) = \boxed{\frac{-1}{x-y} \ (+\text{ costante})} \qquad \boxed{\text{non esiste}}$$

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

   (a) Siano A, B in $\mathbb{R}^2$ definiti come segue:

   $$A := \{(x, y) \,:\, 0 \le x^2 + y^2 \le 1\} \quad , \quad B := \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = 0\} \cup \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

   Allora $B = \partial A$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

   (b) Siano $\gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ e $\Gamma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$, definite da

   $$\gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}}, \qquad \Gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{i}} - \sin(t)\vec{\mathbf{j}}.$$

   Allora Γ è una riparametrizzata di γ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

   (c) La serie (di Fourier) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{1 + n^2}$ converge puntualmente a una funzione continua $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

   (d) Sia $B := \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ e sia $\vec{f} : B \to \mathbb{R}^3$ un campo **irrotazionale**. Allora $\vec{f}$ è conservativo $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

5. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si scriva la definizione di convergenza uniforme su A di (f_n) ad f (3p.).

   Enunciato

$f_n \to f$ UNIF su A se $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Spiegazioni

1. se $a_n = \frac{n!}{n^n}$ allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{e} \Rightarrow R = e$.

$$f''(0) = 2 a_2 = 2 \frac{2!}{2^2} = 1$$

2. Si mettono i punti dentro la $G(x,y)$ e si vede che viene zero solo per $P_0 = (1,1,0)$.

Si vede che $\nabla G = e^{x-y+2z}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla G(1,1,0) = e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

· PER DINI ho $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ esiste f.

· PER DINI $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial y}(1,1,0)}{\frac{\partial G}{\partial z}(1,1,0)} = - \frac{-1}{1} = 1$

3. Cerco U con $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{(x-y)^2}$ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{(x-y)^2} \Rightarrow U = \frac{-1}{x-y} + c(y)$

Se derivo in y $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{(x-y)^2} + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 0$ $c(y) =$ costante

4.a Si ha che A è lo stesso che $\{x^2+y^2 \leq 1\} \Rightarrow \partial A = \{x^2+y^2 = 1\} \neq B$

4.b Basta considerare il cambio di parametro $\varphi(t) = -t$

4.c Segue dal fatto che $\sum \frac{1}{1+n^2}$ è convergente

4.d Ω è semplicemente connesso!! e allora ogni campo irrotazionale in Ω è conservativo

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 1 febbrario 2020 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := 3x^4 + 12x^2y - 4y^3 + 3y^4$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f DIVERSI DA $(0,0)$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

   $(x,y) = \boxed{(\sqrt{2},-1)}$ punto di MINIMO $\quad (x,y) = \boxed{(-\sqrt{2},-1)}$ punto di MINIMO

   $(x,y) = \boxed{(0,1)}$ punto di MINIMO $\quad (x,y) = \boxed{}$ punto di ______

   (b) Si dica MOTIVANDOLO se f ammette minimo su $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo lo si calcoli (3p.)

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \boxed{-5} \quad \boxed{\text{non esiste}}.$$

Svolgimento

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3 + 24xy$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2 - 12y^2 + 12y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 36x^2 + 24y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -24y + 36y^2$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} x^3 + 2xy = 0 \\ x^2 - y^2 + y^3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 0$ oppure $x^2 + 2y = 0$

Se $x=0$ $\Rightarrow -y^2 + y^3 = 0 \iff y = 0$ oppure $y = 1$ (trovo $(0,0)$ e $(0,1)$)

Se $x^2 + 2y = 0 \Rightarrow -2y - y^2 + y^3 = 0 \iff y = 0$ oppure $y^2 - y - 2 = 0$.

$y=0$ mi dà $x=0$ (già trovato); la seconda equazione mi dà $y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\iff y = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$. $y = 2$ è impossibile (avrei $x^2 = -2$); $y = -1 \Rightarrow x^2 = 2$

e quindi trovo $(\sqrt{2},-1)$ e $(-\sqrt{2},-1)$.

Calcoliamo gli Hessiani nei punti critici trovati. (eccetto $(0,0)$)

$H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow$ pto di minimo

$H_f(\pm\sqrt{2},-1) = \begin{bmatrix} 36\cdot 2 - 24 & \pm 24\sqrt{2} \\ \pm 24\sqrt{2} & 24+36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & \pm 24\sqrt{2} \\ \pm 24\sqrt{2} & 60 \end{bmatrix} = 12 \begin{bmatrix} 4 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 5 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 4 > 0 \quad \det = 20 - 8 > 0 \Rightarrow$ pto di minimo

(b) Mostro che $(*)\ \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$. Infatti

$$12x^2y = x^2(12y) \leq \frac{x^4}{2} + \frac{36y^2}{2} = \frac{x^4}{2} + 18y^2 \Rightarrow$$

$$f(x,y) \geq 3x^4 - \frac{x^4}{2} - 18y^2 - 4y^3 + 3y^4 = \frac{5}{2}x^4 + 3y^4 - 4y^3 - 18y^2$$

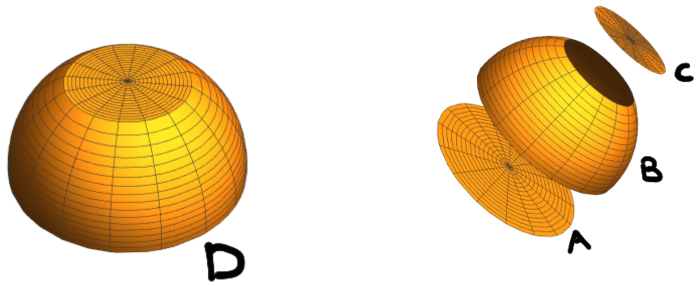
Dato che $\lim_{|x| \to \infty} \frac{5}{2}x^4 = +\infty$ e $\lim_{|y| \to \infty} 3y^4 - 4y^3 - 18y^2 = +\infty \Rightarrow$ vale $(*)$

Ne segue che f HA MINIMO su $\mathbb{R}^2$. Dato che:

$f(0,0) = 0$ $\qquad f(\pm\sqrt{2}, -1) = 3 \cdot 4 + 12 \cdot 2(-1) + 4 + 3 = -5$

$f(0,1) = -4 + 3 = -1$ $\qquad$ si ricava che il minimo vale -5

2. Sia $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{3}\}$. D è un dominio regolare (a tratti):



In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera ∂D scomposta nelle tre superfici regolari A, B e C su cui consideriamo la normale $\hat{\nu}$ unitaria uscente da D. Sia anche $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := x(y^2 + z^2)\vec{\mathbf{i}} + y(x^2 + z^2)\vec{\mathbf{j}} + z(x^2 + y^2)\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente A, B e C (0,5 p. a domanda)

$A = \boxed{\{\ x = 0 \quad y^2 + z^2 \leq 4\ \}}$

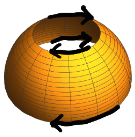
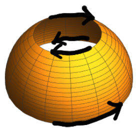
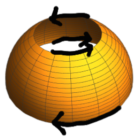
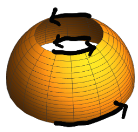
$B = \boxed{\{\ 0 \leq x \leq \sqrt{3}\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\ \}}$

$C = \boxed{\{\ x = \sqrt{3} \quad y^2 + z^2 \leq 1\ \}}$

(b) Si calcoli $\hat{\nu}$ nei punti $P_0 = (0, 1, -1)$ e $P_1 = \left(1, -1, \sqrt{2}\right)$ (0,5+0,5p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{-1}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\ \vec{\mathbf{k}}$ $\quad$ $\hat{\nu}(P_1) = \boxed{1/2}\ \vec{\mathbf{i}} + \boxed{-1/2}\ \vec{\mathbf{j}} + \boxed{\sqrt{2}/2}\ \vec{\mathbf{k}}$

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta l'orientazione di $\Sigma(B)$ coerente con $\hat{\nu}$ (0,5p.):

 [ ]  [X]  [ ]  [ ]

(d) Si calcolino, mostrando i passaggi principali, i seguenti flussi, ($\hat{\nu}$ è sempre quella sopra).

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{71\pi\sqrt{3}}{5}} \quad \text{(3 p.)}$$

$$\iint_{B} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{137}{10}\pi\sqrt{3}} \quad \text{(2 p.)}$$

Svolgimento delle parte (d)

Si ho $\operatorname{div}(\vec{f}) = y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow$

$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f}\, dx dy dz = 2 \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$ PASSO IN COOR. CILINDRICHE

$(x = x\ ,\ y = \rho\cos\theta\ ,\ z = \rho\sin\theta) = 2\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (\rho^2 + x^2)\rho\, d\rho =$

$$4\pi\int_0^{\sqrt3}dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(\rho^3+x^2\rho)\,d\rho = 4\pi\int_0^{\sqrt3}\left[\frac{\rho^4}{4}+\frac{x^2\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}}dx = \pi\int_0^{\sqrt3}\left((4-x^2)^2+2x^2(4-x^2)\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt3}(4-x^2)(\underbrace{4-x^2}_{4-x^2}+2x^2)\,dx = \pi\int_0^{\sqrt3}(16-x^4)\,dx = \pi\left[16x-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt3} = \pi\sqrt3\left(16-\frac{9}{5}\right) = \frac{71\pi\sqrt3}{5}$$

PER IL SECONDO INTEGRALE CALCOLIAMO I FLUSSI SU A e su C e poi facciamo la differenza.

$$\iint_A \vec f\cdot\vec\nu\,d\sigma = \iint_{\{y^2+z^2\le 4\}} \vec f(0,y,x)\cdot(-\vec i)\,dy\,dz = -\iint_{\{y^2+z^2\le4\}} \underbrace{f_1(0,y,z)}_{=0}\,dy\,dz = 0$$

$$\iint_C \vec f\cdot\vec\nu\,d\sigma = \iint_{\{y^2+z^2\le 1\}} \vec f(\sqrt3,y,x)\cdot\vec i\,dy\,dz = \iint_{\{y^2+z^4\le1\}} f_1(\sqrt3,y,z)\,dy\,dz =$$

$$\iint_{\{y^2+z^2\le1\}} \sqrt3(y^2+z^2)\,dy\,dz = \sqrt3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\,\rho\,d\rho = \sqrt3\cdot2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\sqrt3$$

IN DEFINITIVA $\displaystyle\iint_B \vec f\cdot\vec\nu\,d\sigma = \iint_{\partial D}\vec f\cdot\vec\nu\,d\sigma - \iint_A \vec f\cdot\vec\nu\,d\sigma - \iint_C \vec f\cdot\vec\nu\,d\sigma =$

$$\frac{71\sqrt3}{5}\pi - \frac{\pi\sqrt3}{2} = \frac{142-5}{10}\sqrt3\pi = \frac{137}{10}\pi\sqrt3$$

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$xy'' + (2x-3)y' - 10y = 80x$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (2p.):

$(\mathcal{R})$ $$(n-3)(n+1)a_{n+1} + 2(n-5)a_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 80 & n = 1 \end{cases} \quad \forall n$$

(b) Si dica, giustificando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 3$ e se è unica (1p.).

esiste unica | ~~esiste non unica~~ | non esiste

(c) Si mostri che, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione ha un'unica soluzione soluzione tale che $y^{(4)}(0) = \alpha$; si trovi il raggio di convergenza (della serie che definisce y) nel caso $\alpha = 1$ (1p.):

$R = \boxed{+\infty}$.

(d) Si trovi esplicitamente la soluzione y tale che $\alpha = y^{(4)}(0) = 120$ (2p.).

$y(x) = \boxed{y(x) = 3 - 10x + 5x^4 + 2x^5}$

Svolgimento

$$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1} = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} = \sum_0^\infty (n+1)a_{n+1} x^n$$

$$y''(x) = \sum_0^\infty (n+1)n\, a_{n+1} x^{n-1} \Rightarrow$$

$$xy'' + 2xy' - 3y' - 10y = \sum_0^\infty x^n \left((n+1)n\, a_{n+1} + 2n a_n - 3(n+1)a_{n+1} - 10 a_n\right) =$$

$$\sum_0^\infty \left((n-3)(n+1)a_{n+1} + (2n-10)a_n\right).$$ Se impongo l'equazione $\Rightarrow$

$$(\mathcal{R}) \quad (n-3)(n+1)a_{n+1} + 2(n-5)a_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 80 & n = 1 \end{cases}$$

Se prendo $n = 3 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0.}$. Se prendo $n = 2 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$

Se prendo $n = 1 \Rightarrow (-2)(2)\underset{=0}{a_2} + (-8)a_1 = 80 \Rightarrow \boxed{a_1 = -10}$

Se prendo $n = 0 \Rightarrow -3\underset{-10}{a_1} - 10a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 3}$

Da questo si vede che $a_0 = y(0) = 3$ per ogni soluzione

È chiaro inoltre che $\boxed{a_4 = \alpha}$ è libero, mentre, se $n = 4$

$5a_5 - 2a_4 = 0 \Rightarrow \boxed{a_5 = \frac{2}{5}\alpha}$. Se metto $n = 5$

trovo $a_6 = 0$ e, iterando $a_n = 0 \ \forall n \geq 6$. Dunque la soluzione è

$$\boxed{y(x) = 3 - 10x + \alpha x^4 + \frac{2}{5}\alpha x^5}$$

Dato che α è arbitrario ci sono infinite soluzioni - tutte con $y(0) = 3$. Dato che y è un polinomio $\Rightarrow R = +\infty$

Se impongo $y^{(4)}(0) = 120$, essendo $a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} \Leftrightarrow$

$a_4 = \frac{120}{24} = 5 \Rightarrow \alpha = 5 \Rightarrow$

$$y(x) = 3 - 10x + 5x^4 + 2x^5$$

4. (☐ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -2x - 4y + 4z \\ y' &= 3y - z \\ z' &= y + z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebrica e geometrica (2p.):

$$\lambda_1 = \boxed{-2},\ m_A = \boxed{1},\ m_G = \boxed{1},\quad \lambda_2 = \boxed{2},\ m_A = \boxed{2},\ m_G = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(2p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{} & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 1$. (2p.)

$x(t) =$ ☐

$y(t) =$ ☐

$z(t) =$ ☐

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -4 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$-(2+\lambda)\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -(2+\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)+1\right) = -(2+\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda-2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \ (m_A=1) \quad \lambda_2 = 2 \ (m_A = 2)$$

$\underline{\lambda = \lambda_1 = -2}$ $\quad B_1 = A - \lambda I = A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Se $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} B_1$

allora $y = z = 0$ mentre $x \in \mathbb{R}$. Posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = \lambda_2 = 2}$ $\quad B_2 = A - 2I = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ Vedo che B_2 ha rango 2

$\Rightarrow m_G(\lambda_2) = 1$

Calcolo $B_2^2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cerco $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $B_2^2 e_3 = 0$ $B_2 e_3 \neq 0$. La prima condizione impone $16x + 16y - 16z = 0 \iff z = x + y$ cioè $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ se metto $x = 1$ e $y = 0$ ottengo $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e vedo che $B_2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$

Dunque e_3 va bene e posso prendere $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ne risulta la matrice di Jordan $J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Per risolvere il problema di Cauchy uso la formula $Y(t) = e^{tA} Y_0$ dove $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dunque $Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0$ dove $M = [e_1|e_2|e_3]$

Dato che $Y_0 = e_3$ noto che $M \hat{e}_3 = e_3 \iff M^{-1} e_3 = \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. DUNQUE

$$Y(t) = M e^{tJ} \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} =$$

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 1-t \end{pmatrix} \iff x(t) = e^{2t} \quad y(t) = -te^{2t} \quad z(t) = (1-t)e^{2t}$$

Verifica

$x' = 2e^{2t}$ $\quad -2x - 4y + 4z = e^{2t}(-2 + 4t + 4 - 4t) = 2e^{2t} = x'$

$y' = -(1+2t)e^{2t}$ $\quad 3y - z = e^{2t}(-3t - 1 + t) = e^{2t}(-1 - 2t) = y'$

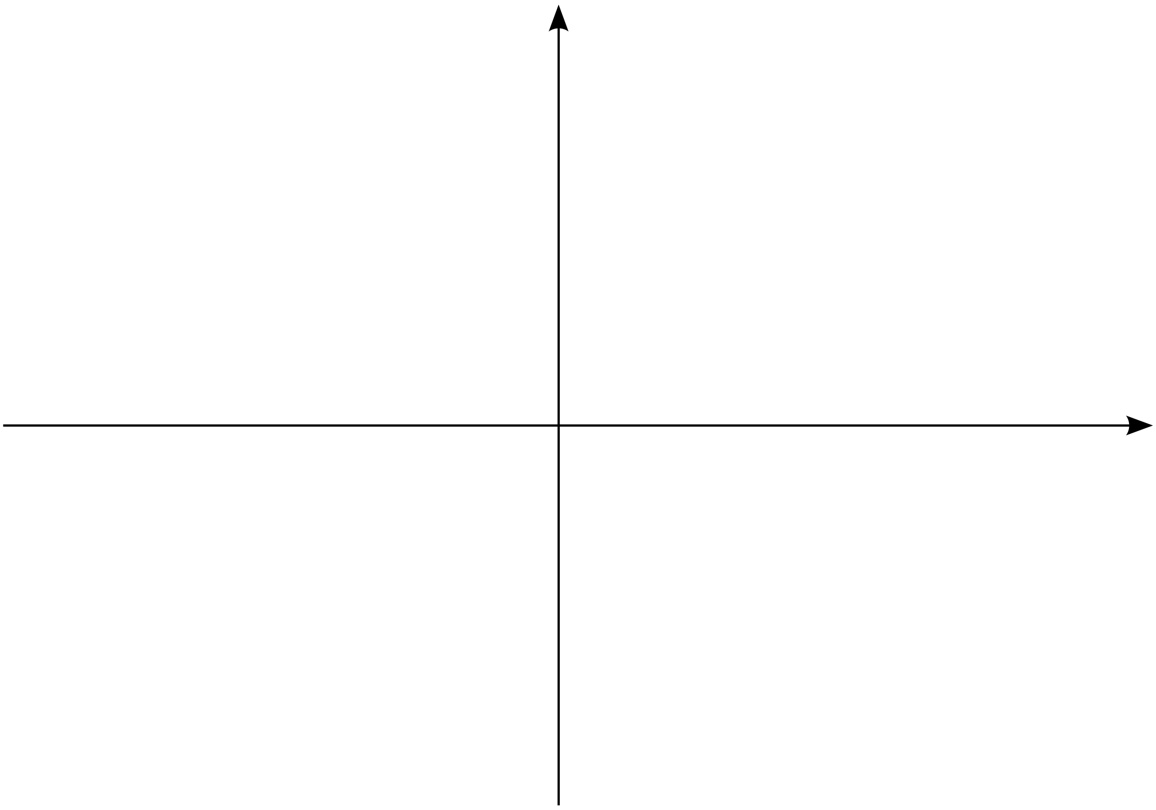
$z' = (1-2t)e^{2t}$ $\quad y + z = e^{2t}(-t + 1 - t) = e^{2t}(1 - 2t) = z'$

$x(0) = 1 \quad y(0) = 0 \quad z(0) = 1$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(3y + 5x^2)}{x(4y + 3x^2)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovino un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ e successivamente un integrale primo Φ (4p.).

$\lambda(x, y) =$ $\qquad\qquad$ $\Phi(x, y) =$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1, -1)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Svolgimento