COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 11 gennaio 2020 - PARTE A

1. Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2 + 3(n!)} x^n$. Si trovi (1 p. a risposta)

   (a) il raggio di convergenza della serie: $R = \boxed{1}$;

   (b) l'intervallo su $f(x)$ è ben definita: $\boxed{]-1,1[}$;

   (c) il valore di $f'''(0) = \boxed{\frac{4}{3}}$ / $\boxed{\text{non esiste}}$.

2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) := x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$. Allora $(0, 0, 0)$ è punto di

   minimo , massimo , ~~né massimo né minimo~~ (2p.).

3. Si trovi (se esiste) un potenziale U per il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x, y) := xy(3xy\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j})$. (2p.)

   $U(x, y, z) = \boxed{x^3 y^2}$ non esiste

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

   (a) L'insieme $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 1, y \geq 1\}$ ha come frontiera $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1, y \geq 1\}$ VERO ~~FALSO~~.

   (b) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva di classe $\mathcal{C}^1$, allora per ogni $t \in [a, b]$ è ben definita la retta tangente a γ nel punto $\gamma(t)$. VERO ~~FALSO~~

   (c) La funzione $f(x, y) := \frac{1}{x^2 + y^2}$ è integrabile sul disco $B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. VERO ~~FALSO~~

   (d) Sia $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo **solenoidale**. Allora per ogni curva chiusa $\gamma : [a, b] \to \Omega$ si ha che:

   $$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0.$$ VERO ~~FALSO~~.

5. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Si enunci il teorema di inversione locale per Φ (mettendo tutte le ipotesi necessarie).

   Enunciato

Sia $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ di classe $C^1(\Omega)$ e supponiamo che $x_0 \in \Omega$ sia tale che $J_\Phi(x_0)$ ha determinante $\neq 0$. Allora esiste U intorno di x_0 tale che $V = \Phi(U)$ è aperto e $\Phi : U \to V$ è bigettiva. Inoltre $\Phi^{-1} : V \to U$ è di classe C^1 e $J_{\Phi^{-1}}(y) = J_\Phi(\Phi^{-1}(y))^{-1}$ $\forall y \in V$

(1) se $a_n = \frac{n!}{n^2+3(n!)}$ allora $a_n = \frac{1}{\frac{n^2}{n!}+3} \to \frac{1}{3}$ perché $\frac{n^2}{n!} \to 0$. Ne segue $\sqrt[n]{a_n} \to 1 \Rightarrow R=1$. Dunque la serie $\sum a_n x^n$ converge per $]-1,1[$ e non converge fuori da $[-1,1]$. Se $x=\pm 1$ ho le due serie $\sum a_n$ e $\sum (-1)^n a_n$. Dato però che $a_n \to \frac{1}{3}$ e $|(-1)^n a_n| = a_n \to \frac{1}{3}$ queste due serie NON CONVERGONO. $\Rightarrow \sum a_n x^n$ converge per $x \in]-1,1[$.

So che $a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} \iff \frac{3!}{3^2+3\cdot 3!} = \frac{f'''(0)}{3!} \iff \frac{6}{9+18} = \frac{f'''(0)}{6} \iff f'''(0) = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$

(2) f è una forma quadratica associata alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Si ha $a_{11} = 1 > 0$, $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 3 > 0$, $\det A = -9 < 0 \Rightarrow (0,0,0)$ di sella

(3) Cerco di trovare U con $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y^2$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^3y$. Integro la prima $\Rightarrow U(x,y) = x^3y^2 + c(y)$. Ne segue $\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^3y + c'(y)$. Se prendo $c(y) = c$ in $\mathbb{R}$ è verificata anche la seconda. (posso prendere $c=0$! cioè $U(x,y) = x^3y^2$)

- $\int_{B(0,1)} \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho^2}\rho\,d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho} = +\infty$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 11 gennaio 2020 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := 2x^4 - x^3 + xy^2 + y^4$.

(a) Si trovino tutti i punti stazionari di f DIVERSI DA $(0,0)$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

$(x,y) = \boxed{\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)}$ punto di MINIMO $(x,y) = \boxed{\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)}$ punto di MINIMO

$(x,y) = \boxed{\left(\frac{3}{8}, 0\right)}$ punto di MINIMO $(x,y) = \boxed{}$ punto di ______

(b) Si dica MOTIVANDOLO se f ammette minimo su $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo lo si calcoli (3p.)

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \boxed{-\frac{81}{2048}} \quad \boxed{\text{non esiste}}.$$

Svolgimento

• $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 3x^2 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 4y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 - 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 12y^2$

• Cerco i pti critici. $\begin{cases} 8x^3 - 3x^2 + y^2 = 0 \\ 2y(x + 2y^2) = 0 \end{cases}$ Lo secondo rigo mi dà $y = 0$ oppure $y^2 = -\frac{x}{2}$

SE $y=0$ La primo rigo $\rightarrow$ $8x^3 - 3x^2 = 0 \iff x = 0$ oppure $8x = 3$. DUNQUE TROVO $(0,0)$ e $\left(\frac{3}{8}, 0\right)$

SE $y^2 = -\frac{x}{2}$ La primo riga $\rightarrow$ $16x^3 - 6x^2 - x = 0 \iff x = 0$ (già visto) oppure

$16x^2 - 6x - 1 = 0$ le cui radici sono $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{16} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{cases}$

La prima darebbe $y^2 = -\frac{1}{4}$ IMPOSSIBILE, LA SECONDA $y^2 = \frac{1}{16} \iff y = \pm\frac{1}{4}$

TROVO ALTRI DUE PUNTI $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$ $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$

• CALCOLO GLI HESSIANI

$H_f\left(-\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. $a_{11} > 0$ $\det H_f = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16} > 0 \Rightarrow$ MINIMI

$H_f\left(\frac{3}{8}, 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{27}{8} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ MINIMO

(b) MOSTRO CHE $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$. Per questo uso la disuguaglianza

$$|xy^2| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2} \Rightarrow f(x,y) \geq 2x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2}$$

Dato che $\lim\limits_{|x|\to\infty} 2x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} = +\infty$, $\lim\limits_{|y|\to\infty} \frac{y^4}{2} = +\infty$ si ha

$\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} 2x^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2} = +\infty$ (se $\|(x,y)\| \to \infty \Rightarrow$ UNO ALMENO TRA $|x|$ e $|y|$ VA a $+\infty$ e l'altro è comunque limitato)

$\Rightarrow \lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$. Per Weierstrass generalizzato la f HA MINIMO su $\mathbb{R}^2$. Ma allora il punto di minimo assoluto deve essere uno dei tre punti trovati prima.

SI HA

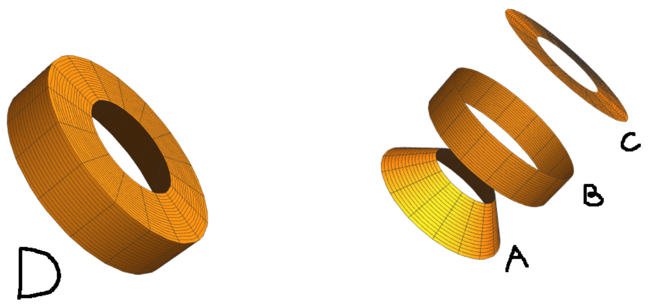
$$f\left(\frac{3}{8},0\right) = 2\frac{3^4}{8^4} - \frac{3^3}{8^3} = \frac{3^3}{8^3}\left(\frac{2}{8}-1\right) = -\frac{3}{4}\,\frac{27}{512} = -\frac{81}{2048}$$

questo è il minimo

$$f\left(-\frac{1}{8},\pm\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{8^4} - \frac{1}{8^3} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} = \frac{\cancel{2}}{2^{\cancel{12}\,11}} - \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^3\cdot 2^4} + \frac{1}{2^8} =$$

$$\frac{1}{2^7}\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^2} - 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^7}\,\frac{1-4-16+8}{2^4} = \frac{-11}{2048}$$

2. Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (2-z)^2 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$. D è un dominio regolare (a tratti):



In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera ∂D scomposta nelle tre superfici regolari A, B e C su cui consideriamo la normale $\hat{\nu}$ unitaria uscente da D. Sia anche $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := (x^2+y^2)(x\vec{\mathbf{i}}+y\vec{\mathbf{j}})+2z\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente A, B e C (0,5 p. a domanda)

$A = \{ \; x^2+y^2 = (2-z)^2, \quad 0 \leq z \leq 1 \; \}$

$B = \{ \; x^2+y^2 = 4 \quad , \; 0 \leq z \leq 1 \; \}$

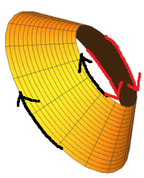
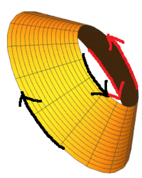
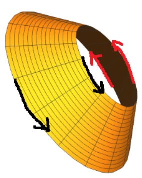
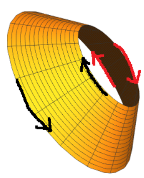
$C = \{ \; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \quad , \; z = 1 \; \}$

(b) ~~Si calcoli $\hat{\nu}$ nei punti $P_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_1 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (0,5+0,5p.):~~

~~$\hat{\nu}(P_0) = \square\,\vec{\mathbf{i}} + \square\,\vec{\mathbf{j}} + \square\,\vec{\mathbf{k}} \qquad \hat{\nu}(P_1) = \square\,\vec{\mathbf{i}} + \square\,\vec{\mathbf{j}} + \square\,\vec{\mathbf{k}}$~~

NON RICHIESTO

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta l'orientazione di $\Sigma(A)$ coerente con $\hat{\nu}$ (0,5p.):

 ☐  ☐  ☐  ☐

(d) Si calcolino, mostrando i passaggi principali, i seguenti flussi, ($\hat{\nu}$ è sempre quella sopra).

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \frac{344}{15}\pi \qquad \text{(3 p.)}$$

$$\iint_{A} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = -\frac{226}{15}\pi \qquad \text{(2 p.)}$$

Svolgimento delle parte (d)

(1) $\operatorname{div} \vec{f} = 3x^2+y^2+x^2+3y^2+2 = 2+4x^2+4y^2$. Uso il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iiint_D 2+4(x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz = \text{(coordinate cilindriche)} =$$

$$\iiint_{D_1} (2+4\rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta\, dz \quad \text{dove} \quad D_1 = \{(\rho,\theta,z) : 0\le z\le 1 \ , \ 2-z \le \rho \le 2\}$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{2-z}^{2} (2+4\rho^2)\rho\, d\rho = 2\pi \int_0^1 dz \int_{2-z}^{2} (2+4\rho^2)\rho\, d\rho = \quad (\rho^2 = s \quad 2\rho\, d\rho = ds)$$

$$\pi \int_0^1 dz \int_{(2-z)^2}^{4} (2+4s)\, ds = \pi \int_0^1 \left[2s+2s^2\right]_{(2-z)^2}^{4} dz = 2\pi \int_0^1 \left(20-(2-z)^2-(2-z)^4\right) dz =$$

$$2\pi \int_2^1 (20-t^2-t^4)(-dt) = 2\pi \int_1^2 (20-t^2-t^4)\, dt = 2\pi \left[20t - \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_1^2 = 2\pi\left(20 - \frac{8-1}{3} - \frac{32-1}{5}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{15}(300-35-93) = \frac{344}{15}\pi$$

(2) Posso fare il calcolo diretto usando la parametrizzazione (cartesiana) di A

$\phi(u,v) = (u, v, 2-\sqrt{u^2+v^2})$ per $(u,v) \in \Omega = \{1 \le u^2+v^2 \le 4\}$.

Come noto $\vec{N}(u,v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$ CHE PERÒ VA CAMBIATA di verso

dato che altrimenti $\vec{N}$ è entrante in D. $\Rightarrow$

$$\iint_A \vec{f}\, d\sigma = -\iint_\Omega \vec{f}(u,v,2-\sqrt{u^2+v^2}) \cdot \vec{N}(u,v)\, du\, dv =$$

$$-\iint_\Omega \left((u^2+v^2)\, u \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} + (u^2+v^2)\, v \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} + 2\left(2-\sqrt{u^2+v^2}\right)\right) du\, dv =$$

$$-\iint_\Omega (u^2+v^2)^{\frac{3}{2}} - 2(u^2+v^2)^{1/2} + 4 = \quad \text{(coordinate polari)}$$

$$= -2\pi \int_1^2 (\rho^3 - 2\rho + 4)\rho\, d\rho = -2\pi \left[\frac{\rho^5}{5} - \frac{2\rho^3}{3} + 4\rho\right]_1^2 = -\frac{226}{15}\pi$$

OPPURE possiamo ragionare per differenza. Infatti

- $\displaystyle \iint_C \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{1\le x^2+y^2\le 4} \underbrace{\vec{f}(x,y,2)\cdot \vec{k}}_{= f_3(x,y,2)}\, dx\, dy = \iint_{1 \le x^2+y^2 \le 4} 2\, dx\, dy = 2 \cdot 2\pi \int_1^2 \rho\, d\rho = 6\pi$

- $\displaystyle \iint_B \hat{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \left(\text{parametrizzo B con } \phi(\theta,z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, z) \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix}\right)$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \hat{f}(2\cos\theta, 2\sin\theta, z) \cdot (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)\, d\theta\, dz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \begin{pmatrix} 4\cdot 2\cos\theta \\ 4 \cdot 2\sin\theta \\ 2z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 16\, dz = 2\pi \cdot 16 = 32\pi$$

$\Rightarrow$ USANDO IL PUNTO (1)

$$\iint_A = \iint_{\partial D} - \iint_C - \iint_B \Rightarrow \iint_A = \frac{344}{15}\pi - 6\pi - 32\pi = \frac{344 - 38\times 15}{15}\pi$$

$$= \frac{344-570}{15}\pi = -\frac{226}{15}\pi$$

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$x(x-3)y'' - (2x-6)y' - 4y + 12x^2 = 0$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (2p.):

$(\mathcal{R})$ $\boxed{a_2 = 2 \quad , \quad a_{m+1} = \frac{(m-4)}{3(m-2)} a_m \quad \forall m \neq 2}$

(b) Si dica, giustificando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e se è unica (1p.).

esiste unica | esiste non unica | ~~non esiste~~

(c) Si mostri che, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione ha un'unica soluzione soluzione tale che $y'''(0) = \alpha$; si trovi il raggio di convergenza (della serie che definisce y) nel caso $\alpha = 1$ (1p.):

$R = \boxed{+\infty}$.

(d) Si trovi esplicitamente la soluzione y tale che $\alpha = y'''(0) = 18$ (2p.).

$y(x) = \boxed{3 + 2x + 2x^2 + 3x^3 - x^4}$

Svolgimento

Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$

$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1}$. DUNQUE:

$x(x-3)y''(x) - (2x-6)y'(x) - 4y(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n (n-1) n - 3 a_{n+1}(n+1) n - 2 a_n n + 6 a_{n+1} (n+1) - 4 a_n \} x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \{ a_{n+1} [-3(n+1)n + 6(n+1)] + a_n [(n-1)n - 2n - 4] \} x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \{ -(3n-6)(n+1) a_{n+1} + (n^2 - 3n - 4) a_n \} x^n =$

radici $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \{ -(3n-6)(n+1) a_{n+1} + (n-4)(n+1) a_n \} x^n$

Se impongo l'equazione trovo che la serie sopra deve fare $-12x^2 = \sum \delta_n x^n$

dove $\delta_n = \begin{cases} -12 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Ne ottengo

$$(R.1) \quad 3(n-2)(n+1)a_{n+1} = (n-4)(n+1)a_n - \delta_n \quad \forall n$$

Se metto $n=2$ TROVO $\quad 0 = (-2)\cdot 3\, a_2 + 12 \iff \boxed{a_2 = 2}$

Se $n \neq 2$, posso semplificare $(n+1) \neq 0$, e riscrivere $(R.1)$ come:

$$(R.2) \quad a_2 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{(n-4)}{3(n-2)} a_n \quad \forall n \neq 2$$

Ma se $n=1$ da $(R.2)$ ottengo $\quad a_2 = \frac{-3}{3(-1)} a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = a_2 = 2}$

e se $n=0$ $\quad a_1 = \frac{-4}{3(-2)} a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{3}{2} a_1 = 3}$

INOLTRE, SE $n=4$, TROVO da $(R.2)$ $a_5 = 0$, e iterando $a_n = 0 \ \forall n \geq 5$

In definitiva $\quad y(x) = 3 + 2x + 2x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \quad$ con

a_3 arbitrario in $\mathbb{R}$ e a_4 che si ottiene da $(R.2)$ mettendo $n=3 \Rightarrow$

$$a_4 = \frac{(-1)}{3\cdot 1} a_3 = -\frac{a_3}{3} \iff y(x) = \underbrace{3 + 2x + 2x^2}_{y_0(x)} + a_3 x^3 - \frac{a_3}{3} x^4,$$

dove: $a_3 = \frac{y'''(0)}{6} = \frac{\alpha}{6}$

$\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario

DA TUTTO QUESTO SI VEDE CHE:

1. OGNI y SOLUZIONE DEVE AVERE $y'(0) = 2$ (NO SOL. ALLA DOMANDA b))
2. LA DOMANDA (c) ha risposta positiva e $R = +\infty$ dato che $y(x)$ è un polinomio di grado (al più) quattro
3. LA RISPOSTA ALLA DOMANDA (d) si ottiene con $a_3 = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow$
   $y(x) = 3 + 2x + 2x^2 + 3x^3 - x^4$

VERIFICA CHE $y_0(x)$ è soluzione
2

$y = 3 + 2x + 2x^2 \qquad y' = 2 + 4x \qquad y'' = 4$

$x(x-3)y'' - (2x-6)y' - 4y = (x^2-3x)4 + (-2x+6)(2+4x)$

$-4(3+2x+2x^2) = 4x^2 - 12\cancel{x} - \cancel{4x} - 8x^2 + \cancel{12} + \cancel{24x} - \cancel{12} - \cancel{8x} - 8x^2$

$= -12x^2$

4. (☐ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -8x + 2y - 12z \\ y' &= -7x + 2y - 10z \\ z' &= 4x - y + 6z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebrica e geometrica (2p.):

$\lambda_1 = \boxed{0}$, $m_A = \boxed{3}$, $m_G = \boxed{1}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $m_A = \boxed{}$, $m_G = \boxed{}$.

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(2p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$x(t) = \boxed{-4t^2 + 2t + 1}$

$y(t) = \boxed{-\frac{7}{2}t^2 + 2t}$

$z(t) = \boxed{2t^2 - t}$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -12 \\ -7 & 2 & -10 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -8-\lambda & 2 & -12 \\ -7 & 2-\lambda & -10 \\ 4 & -1 & 6-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$-(8+\lambda)(\lambda-2)(\lambda-6) - 80 - 84 + (8+\lambda)\cdot 10 + 48(2-\lambda) + 14(6-\lambda) =$$

$$-(8+\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) \cancel{-80} \cancel{-84} + \cancel{80} + 10\lambda + 96 - 48\lambda + \cancel{84} - 14\lambda =$$

$$-(\cancel{8\lambda^2} - 64\lambda + \cancel{96} + \lambda^3 - \cancel{8\lambda^2} + 12\lambda) + \cancel{96} - 52\lambda = 52\lambda - \lambda^3 + 52\lambda = -\lambda^3$$

$\Rightarrow$ UNICO AUTOVALORE $\lambda = 0$ DI MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA 3

CONSIDERO $B = A - 0I = A$ e faccio le potenze

$$A^2 = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -12 \\ -7 & 2 & -10 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 2 & -12 \\ -7 & 2 & -10 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

← si vede che A^2 ha rango 1 dato che tutte le righe sono multiple della prima.

$A^3 = 0$ dato che la dimensione è $N=3$.

Cerco e_3 in $\mathbb{R}^3 \, (= \operatorname{Ker} A^3)$ tale che $A^2 e_3 \neq 0$. Per esempio

$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ che mi dà $e_1 := A^2 e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Inoltre prendo

$e_2 = A e_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ (dunque $e_1 = A e_2$). Dal fatto che

$A^2 \neq 0$ segue $m_G(0) = 1$ e $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Per l'ultimo punto uso la formula $Y(t) = e^{tA} Y_0$ con $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e cioè $Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0$ con $M = [e_1 | e_2 | e_3]$. Noto che

$Y_0 = e_3 \Rightarrow M^{-1} Y_0 = M^{-1} e_3 = \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$Y(t) = M e^{tJ} \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 & & 1 \\ 2 & & 0 \\ -1 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} t^2 - 8t + 1 \\ t^2 - 7t \\ -t^2/2 + 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

<u>VERIFICA</u>:

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 - 8t + 1 & x'(t) &= 2t - 8 \\ y(t) &= t^2 - 7t & y'(t) &= 2t - 7 \\ z(t) &= -t^2/2 + 4t & z'(t) &= -t + 4 \end{aligned}$$

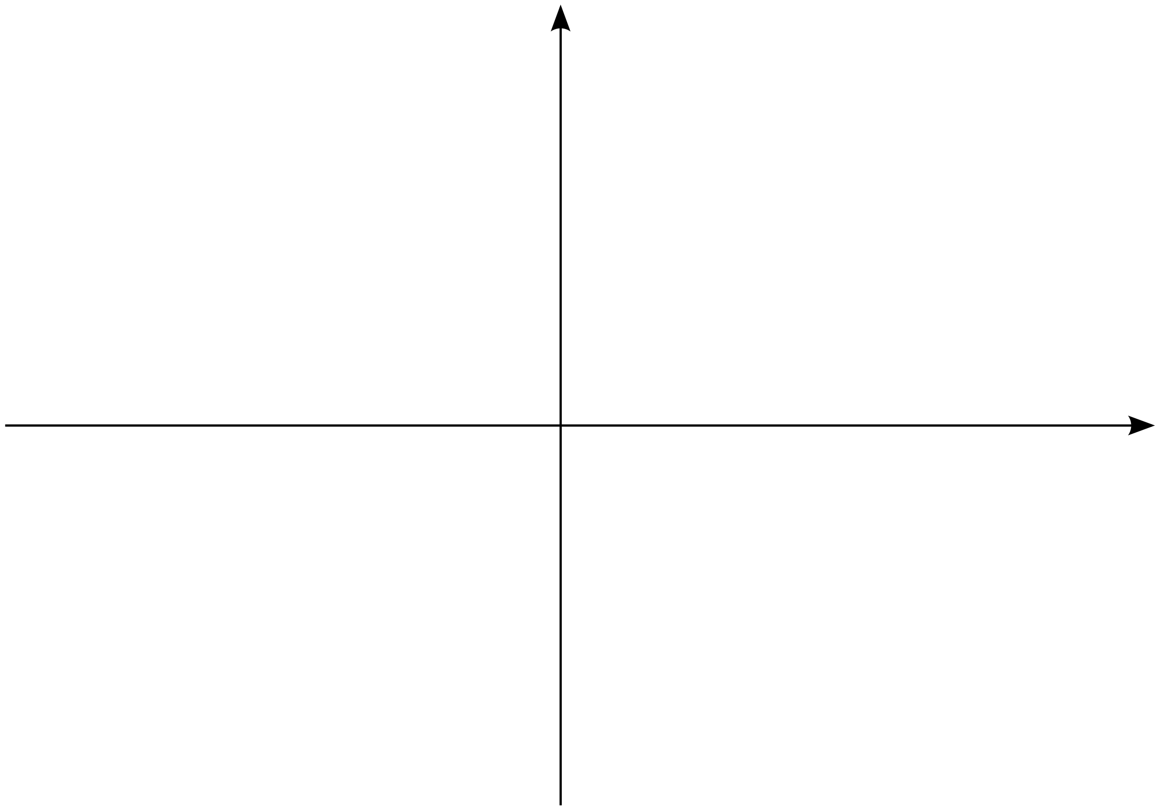
$$-8x(t) + 2y(t) - 12z(t) = -\cancel{8t^2} + 64t - 8 + \cancel{2t^2} - 14t + \cancel{6t^2} - 48t = 2t - 8 = x'(t)$$
$$-7x(t) + 2y(t) - 10z(t) = -\cancel{7t^2} + 56t - 7 + \cancel{2t^2} - 14t + \cancel{5t^2} - 40t = 2t - 7 = y'(t)$$
$$4x(t) - y(t) + 6z(t) = \cancel{4t^2} - 32t + 4 - \cancel{t^2} + 7t - \cancel{3t^2} + 24t = -t + 4 = z'(t)$$

$Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(3y + 5x^2)}{x(4y + 3x^2)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovino un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ e successivamente un integrale primo Φ (4p.).

$\lambda(x, y) =$ $\quad\quad\quad\quad$ $\Phi(x, y) =$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1, -1)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Svolgimento