COGNOME: | | | | | | | | | | | |

NOME: | | | | | | | | | | | |

MATR.: | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 25 novembre 2019 - PARTE A[1]

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := (1 + 2x - y))e^{2xy}$. Si calcoli il polinomio di Taylor di grado 4 rispetto all'origine (2p.):

$$P_{4,(0,0)}(x, y) = \boxed{1 + 2x - y + 2xy + 4x^2y - 2xy^2 + 2x^2y^2}$$

Si trovi inoltre (2p.): $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0, 0) = \boxed{8}$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione differenziabile tale che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = 3, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) = -2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0) = 5.$$

Poniamo $g(x, y) := f(2x - y, xy - 2)$. Si scriva la matrice Jacobiana di g nel punto $(1, 2)$ (2p.)

$$J_g(1, 2) = \begin{bmatrix} \boxed{10} & \boxed{-1} \\ \boxed{6} & \boxed{7} \end{bmatrix}.$$

3. Siano

$$A := \{(x, y) : x^2 < 1, y \geq 1\} \quad , \quad B := \{(x, y) : x^2 = 1, y \geq 1\}.$$

Allora

A è limitato $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$; A è aperto $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$;

B è chiuso $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$; $B = \partial A$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$.

4. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva. Si dica se valgono le seguenti proprietà.

   (a) se γ è continua, allora γ è rettificabile (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$;

   (b) se γ è $\mathcal{C}^1([a, b])$, allora γ ammette retta tangente in ogni suo punto (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$.

   (Deve anche essere $\gamma'(t) \neq 0$)

5. Si dimostri la seguente proprietà (utilizzata nella caratterizzazione dei punti critici in base al comportamento della matrice Hesiana) (4p.).

Proposizione Se A è una matrice quadrata $N \times N$ e se A è definita positiva, allora esiste una costante $c > 0$ tale che:

$$(A\vec{v}) \cdot \vec{v} \geq c\|\vec{v}\|^2 \qquad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$$

Svolgimento

[1] Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

- So che $Av \cdot v > 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^N$ con $v \neq \vec{0}$
- Considero la funzione $v \longmapsto Av \cdot v$ sull'insieme
  $S = \{ \|x\| = 1 \}$.
- f è continua, S è chiuso e limitato $\Rightarrow$ per Weierstrass
  esiste $v_0 \in S$ tale che $f(v) \geq f(v_0) \quad \forall\ x \in S$.
- Se chiamo $c = f(v_0) = Av_0 \cdot v_0$ ho $c > 0$ perché $v_0 \neq 0$;
  Inoltre $Av \cdot v \geq c$ per ogni $v \in S$.
- Se v è un qualunque vettore di $\mathbb{R}^N$ con $v \neq \vec{0}$ allora

  $\frac{v}{\|v\|} \in S$ e quindi $A \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{v}{\|v\|} \geq c \iff$

  $\frac{1}{\|v\|^2} Av \cdot v \geq c \iff Av \cdot v \geq c \|v\|^2$

  (se $v = 0$ la disuguaglianza è ovvia).

Ingegneria Aerospaziale, Compitino del 25 novembre 2019 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := x^3 - 4xy^2 + x^4 + 8y^4$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f DIVERSI DA $(0, 0)$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

   $(x, y) = \boxed{\left(-\frac{3}{4}, 0\right)}$ punto di MIN $\qquad (x, y) = \boxed{}$ punto di ______

   $(x, y) = \boxed{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}$ punto di MIN $\qquad (x, y) = \boxed{\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)}$ punto di MIN

   (b) Si dica MOTIVANDOLO se f ammette minimo su $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo lo si calcoli (3p.)

   $$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = \boxed{-\frac{27}{256}}$$ non esiste.

$$\frac{6}{4} + \frac{12}{16} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$
$$-\frac{8}{4} = -2$$
$$-\frac{8}{4} + \frac{96}{16} = -2 + \frac{\cancel{24}^{\,6}}{\cancel{4}} = 4$$

Svolgimento

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{3x^2 - 4y^2 + 4x^3} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = \boxed{-8xy + 32y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 12x^2 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8y \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -8x + 96y^2$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 4y^2 + 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = xy \end{cases}$$

LA SECONDA RIGA VALE $\iff \boxed{y = 0 \text{ oppure } 4y^2 = x}$

SE $y = 0$ $\quad 3x^2 + 4x^3 = 0 \iff x = 0$ oppure $x = -\frac{3}{4}$

DUNQUE TROVO $(0, 0)$ e $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

SE $4y^2 = x$ $\quad 3x^2 - x + 4x^3 = 0 \iff x = 0$ (GIÀ VISTA) oppure $4x^2 + 3x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4} = 4y^2 = \frac{1}{4} \iff y = \pm\frac{1}{4} \\ -1 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ IMPOSSIBILE PERCHÉ $4y^2 = -1$

TROVO $\left(\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}\right)$

VEDIAMO GLI HESSIANI

$$H_f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}, 0\right) \text{ di MINIMO}$$

$$\left.\begin{array}{l} Hf\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ Hf\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{4}\right)=\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \det = 9-4>0 \;,\; a_{11}>0 \qquad \text{PUNTI DI MINIMO}$$

(b) Vediamo che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=+\infty$ infatti

$$f(x,y) = x^3 - 4xy^2 + x^4 + 8y^4 \overset{(*)}{\geq} x^3 - 4\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^4\right) + x^4 + 8y^4 =$$

$$x^3 - 2x^2 + x^4 + 6y^4$$ e si ha $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3-2x^2+x^4=+\infty$ $\displaystyle\lim_{y\to\infty} 6y^4=+\infty$

(*) uso $|ab| \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$. USO INOLTRE CHE SE $(x,y)\to\infty$ allora almeno uno tra $|x|$ e $|y|$ va a $+\infty$. Dunque almeno uno tra $x^3-2x^2+x^4$ e $6y^4$ va a $+\infty$, mentre l'altro è comunque limitato inferiormente.

- Da Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ $\exists \displaystyle\min_{\mathbb{R}^2} f$ e quindi esiste (x_0,y_0) pto di minimo per f su $\mathbb{R}^2$. Ma allora (x_0, y_0) è un punto critico dunque (x_0,y_0) è uno tra $\left(\frac{-3}{4},0\right)$ $\left(\frac{1}{4},\frac{\pm 1}{4}\right)$

Calcolo f in questi tre punti:

$$f\left(\frac{-3}{4},0\right) = \frac{-27}{4^3}+\frac{81}{4^4} = \frac{-108+81}{4^4} = \frac{-27}{256} \leftarrow \text{MINIMO } (27>3 \;!!)$$

$$f\left(\frac{1}{4},\frac{\pm 1}{4}\right) = \frac{1}{4^3} - 4\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^4} + \frac{8}{4^4} = \frac{4}{4^4} - \frac{16}{4^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{8}{4^4} = \frac{-3}{256}$$

2. Si consideri la curva $\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) := e^{-t}(\sin(t), \cos(t)).$$

(a) Si calcolino (1+1+1 p.)

$$\gamma(0) = \left(\boxed{0}, \boxed{1}\right), \quad \gamma'(0) = \left(\boxed{1}, \boxed{-1}\right), \quad \lim_{t\to\infty} \gamma(t) = \left(\boxed{0}, \boxed{0}\right).$$

(b) Dato $L > 0$ si calcoli inoltre la lunghezza $\ell(L)$ del tratto di curva individuato da $0 \le t \le L$ (3p.):

$$\ell(L) = \boxed{\sqrt{2}(1-e^{-L})}$$

(c) Si calcoli infine (1p.)

$$\lim_{L\to\infty} \ell(L) = \boxed{\sqrt{2}}$$

Svolgimento

(a) $\gamma(t) = e^{-t}(\sin(t), \cos(t)) \Rightarrow \gamma(0) = (0, 1)$

$\gamma'(t) = -e^{-t}(\sin(t), \cos(t)) + e^{-t}(\cos(t), -\sin(t)) \Rightarrow$

$\gamma'(0) = -(0, 1) + (1, 0) = (1, -1)$

$\|\gamma(t)\| = e^{-t} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|\gamma(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = (0, 0)$

(b) $\|\gamma'(t)\| = \| e^{-t}(\cos(t) - \sin(t), -\cos(t) - \sin(t))\| =$

$e^{-t}\sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) + \sin(t))^2} =$

$e^{-t}\sqrt{\cos^2(t) - \cancel{2\cos(t)\sin(t)} + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \cancel{2\cos(t)\sin(t)} + \sin^2(t)} =$

$e^{-2}\sqrt{2} \Rightarrow \ell(L) = \int_0^L e^{-t}\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^L =$

$\sqrt{2}(1 - e^{-L})$

(c) $\lim_{L\to\infty} \sqrt{2}(1 - e^{-L}) = \sqrt{2}$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si provi che f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$ (3p.).

(b) Si mostri che per ogni $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ esiste $f'(\mathbf{0})(\vec{v})$ e lo si calcoli (2p.):

$$f'(\mathbf{0})(\vec{v}) = \boxed{0}$$

(c) Si dimostri che f non è differenziabile in $\mathbf{0}$ (3p.).

Svolgimento

(a) Si ha $|f(x,y)| = \dfrac{|x|\,|x^2 y|}{x^4+y^2} \leq \dfrac{|x|}{x^4+y^2}\left(\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{y^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}|x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ $\qquad$ f CONTINUA

(b) $\lim_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t(v_x,v_y)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{(t^3 v_x^3)(t v_y)}{t^4 v_x^4 + t^2 v_y^2} = \lim_{t\to 0} \dfrac{t\, v_x^3 v_y}{t^2 v_x^4 + v_y^2}$

QUESTO LIMITE FA 0 se $v_y \neq 0$ perché il numeratore $\to 0$ e il denominatore $\to v_y^2 \neq 0$. Se $v_y = 0$ l'argomento del limite fa ZERO per ogni $t \neq 0$ $\Rightarrow$ IN OGNI CASO TROVO $f'(0,0)(\vec{v}) = 0$

(c) Dal punto (b) segue che se f è differenziabile in $(0,0)$ $\Rightarrow$ $df(0,0) = 0$. Dunque la differenziabilità equivale a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0\cdot x - 0\cdot y}{\|(x,y)\|} = 0 \leftarrow \qquad \text{CIOÈ}$$

$$(*) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

MA QUESTO NON È POSSIBILE DATO CHE, SE MI RESTRINGO SU $\boxed{y = x^2}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 x^2}{(x^4+x^4)\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+1)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \quad (\neq 0)$$

(poi su $x=0$ $y\to 0$ / $y=0$ $x\to 0$ il limite fa ZERO $\Rightarrow$ IL LIMITE $(*)$ NON ESISTE)