COGNOME: | | | | | | | | | | | |

NOME: | | | | | | | | | | | |

MATR.: | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 21 settembre 2019 - PARTE A

1. Si consideri la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 4^n} x^n$. Si trovi (1 p. a risposta)

   (a) il raggio di convergenza della serie: $R = \boxed{2}$;

   (b) l'intervallo su $f(x)$ è ben definita: $\boxed{]-2, 2[}$;

   (c) il valore di $f''(0) = \boxed{2/5}$ / non esiste .

2. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) := -3x^2 + 2y^2 - 4yz - z^2$. Allora $(0, 0, 0)$ è punto di

   minimo , massimo , né massimo né minimo (2p.).

3. Si trovi un potenziale U per il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{f}(x, y, z) := \frac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$. (2p.)

$$U(x, y, z) = \boxed{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$$

4. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$. Si enunci il teorema sull'esistenza e unicità del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione periodica di classe $\mathcal{C}^2$. Allora la serie di Fourier associata a f converge uniformemente su $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(b) Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ e supponiamo che in un punto x_0 la matrice Hessiana $H_f(x_0)$ sia **definita positiva**. Allora x_0 è punto di minimo relativo per f. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ (*)

(c) Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva **chiusa** di classe $\mathcal{C}^1(a, b)$, allora $\|\gamma\|$ è costante. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

(d) Sia $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo **conservativo**. Allora per ogni superficie orientata $(S, \hat{\nu})$ si ha che:

$$\iint_S (\nabla \otimes \vec{f}) \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = 0. \qquad \boxed{\text{VERO}}\ \boxed{\text{FALSO}}.$$

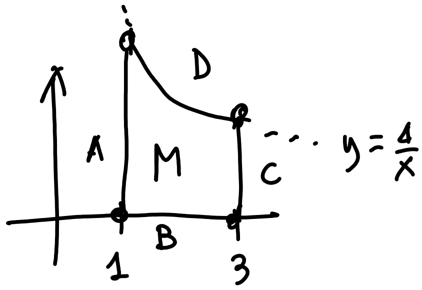
(*) manca $\nabla f(x_0) = 0$ (**) $\vec{f}$ conservativo $\Rightarrow \nabla \otimes \vec{f} = 0$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 21 settembre 2019 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si considerino $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := xy(x^2+y^2)$ e $M := \{(x,y) : 1 \le x \le 3, 0 \le xy \le 4\}$. Si trovino il massimo e il minimo di f su M (6p.)

$$\min_{x\in M} f(x) = \boxed{0}, \qquad \max_{x\in M} f(x) = \boxed{68}$$

Svolgimento



$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2y + y^3 \\ x^3 + 3xy^2 \end{pmatrix}$$

(1) Cerco i pti staz di f su $\mathring{M}$

$$\begin{cases} 3x^2y + y^3 = 0 \\ x^3 + 3xy^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(3x^2+y^2) = 0 \\ x(x^2+3y^2) = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \notin \mathring{M}$$

(2) pti critici vincolati su A (uso $g(x,y) = x-1$)

$$\begin{cases} 3x^2y + y^3 = \lambda \\ x^3 + 3xy^2 = 0 \\ x = 1 \quad 0 < xy < 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y + y^3 = \lambda \\ 1 + 3y^2 = 0 \\ x = 1, \quad 0 < xy < 4 \end{cases} \leftarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

(3) pti critici vincolati su B ($g(x,y) = y$)

$$\begin{cases} 3x^2y + y^3 = 0 \\ x^3 + 3xy^2 = \lambda \\ 1 < x < 3, y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ \lambda = x^3 + 3xy^2 = \lambda \\ y = 0, \ 1 < x < 3 \end{cases} \leftarrow \text{TUTTI I PUNTI } (x,0) \text{ VANNO BENE}$$

NOTA CHE $f(x,0) = 0$

(4) pti critici vincolati su C (si fanno come in (2))

$\to$ NESSUN PUNTO

⑤ pti critici vincolati in D

$$\begin{cases} 3x^2y + y^3 = \lambda y \\ x^3 + 3x^2y = \lambda x \\ xy = 4 \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

posso semplificare y e x perché $(0,0)$ non risolve

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = \lambda \\ x^2 + 3y^2 = \lambda \\ xy = 4 \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 3x^2 + y^2 \\ 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \\ xy = 4 \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dots \\ 2x^2 = 2y^2 \\ xy = 4 \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x,y) = (2,2)$

NOTO CHE $f(2,2) = 4(4+4) = 32$

⑥ "vertici" $(1,0), (3,0), (1,4), (3, \frac{4}{3})$

VEDO che $f(1,0) = f(3,0) = 0$

$$f(1,4) = 4(1^2 + 4^2) = 4 \cdot 17 = 68$$

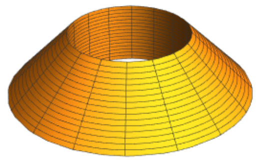
$$f(3, 4/3) = 4\left(3^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right) = \frac{4 \cdot 97}{9} = \frac{388}{9}$$

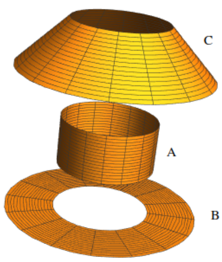
CONTROLLO COME SONO QUESTI VALORI:

$$0 < 32 < \frac{388}{9} = 43{,}\bar{1} < 68$$

$$\Rightarrow \min_M f = 0 \quad , \quad \max_M f = 68$$

2. Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le (2-z)^2, z \ge 0\}$. D è un dominio regolare:





In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera ∂D scomposta nelle tre superfici regolari A, B e C su cui consideriamo la normale $\hat\nu$ unitaria uscente da D. Sia anche $\vec f : D \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec f(x,y,z) := (x^2+y^2)(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}) - 2z\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente A, B e C (0,5 p. a domanda)

$A = \{\ x^2+y^2=1\ ,\ 0 \le z \le 1\ \}$

$B = \{\ 1 \le x^2+y^2 \le 2\ ,\ z=0\ \}$

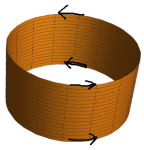
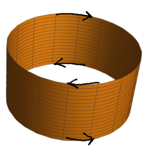
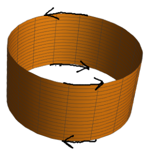
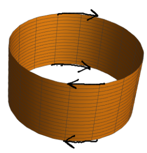
$C = \{\ x^2+y^2=(2-z)^2,\ 0 \le z \le 1\ \}$

(b) Si calcoli $\hat\nu$ nei punti $P_0 = \left(\frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}, \frac{\sqrt2}{2}\right)$ e $P_1 = \left(\frac{3\sqrt2}{4}, \frac{3\sqrt2}{4}, \frac12\right)$ (0,5+0,5p.):

$\hat\nu(P_0) = \boxed{-\sqrt2/2}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-\frac{\sqrt2}{2}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}}$ $\qquad \hat\nu(P_1) = \boxed{1/2}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{1/2}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{\sqrt2/2}\,\vec{\mathbf{k}}$

CONTA SOLO $\hat\nu(P_0)$ e vale 1 p.

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta l'orientazione di $\Sigma(A)$ coerente con $\hat\nu$ (0,5p.):

 ☐  ☐  ☒  ☐

(d) Si calcolino, mostrando i passaggi principali, i seguenti flussi, ($\hat\nu$ è sempre quella sopra).

$\iint_{\partial D} \vec f \cdot \hat\nu \, d\sigma = \boxed{\frac{116}{15}\pi}$ (3 p.)

$\iint_{C} \vec f \cdot \hat\nu \, d\sigma = \boxed{\frac{146}{15}\pi}$ (2 p.)

Svolgimento delle parte (d)

Calcolo la divergenza di $\vec f$:

$\vec\nabla \cdot \vec f = 3x^2 + y^2 + x^2 + 3y^2 - 2 = 4(x^2+y^2) - 2$

(d1) Uso il t. della div. $\Rightarrow$

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_D \vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \iiint_D \left(4(x^2+y^2)-2\right) dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^1 dz \iint_{1\le x^2+y^2\le(2-z)^2} \left(4(x^2+y^2)-2\right) dx\,dy = \quad \text{(coord. polari)}$$

$$\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{2-z} (4\rho^2-2)\rho\, d\rho = 2\pi \int_0^1 \left[\rho^4-\rho^2\right]_1^{2-z} dz =$$

$$2\pi \int_0^1 \left((2-z)^4-(2-z)^2+1-1\right) dz = \quad (t=2-z)$$

$$2\pi \int_1^2 (t^4-t^2)\, dt = 2\pi \left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = 2\pi = \frac{116}{15}\pi$$

(d.2) • Noto che

$$\iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu} = 0 \quad \text{perché su } B \ \hat{\nu} = \vec{K} \quad \text{dunque}$$

$\vec{f}\cdot\vec{\nu} = f_3$ e $f_3 = 0$ su B dato che su B $z=0$

• Noto che su A si ho $\hat{\nu}(x,y,z) = -x\vec{i} - y\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{f}\cdot\vec{\nu} = (x^2+y^2)(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(-x\vec{i}-y\vec{j}) = -(x^2+y^2)^4$$

$$= -1 \quad (\text{su } A \ x^2+y^2=1) \qquad \text{Dunque}$$

$$\iint_A \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \text{Area}(A) = -2\pi \quad \left(\begin{array}{l} A = \text{cilindro} \\ \text{di raggio } 1 \\ \text{e altezza } 1 \end{array}\right)$$

• Dunque $\displaystyle\iint_C \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma - \iint_A \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma - \iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma$

$$= \frac{116}{15}\pi + 2\pi = \frac{146}{15}\pi$$

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$x(x+2)y'' + (3x-4)y' + y = 9x^2$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (2p.):

$(\mathcal{R})$

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1$$

$$a_{m+1} = \frac{m+1}{2(2-m)} a_m \qquad \forall m \geq 3$$

(b) Si dica, giustificando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ e se è unica (2p.).

esiste unica | esiste non unica | ~~non esiste~~

(c) Si mostri che, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione ha un'unica soluzione soluzione tale che $y'''(0) = \alpha$; si trovi il raggio di convergenza (della serie che definisce y) nel caso $\alpha = 1$ (1p.):

$R = 2$.

(d) Si trovi esplicitamente la soluzione y tale che $y'''(0) = 0$ (1p.).

$y(x) = 4 + x + x^2$

Svolgimento

Suppongo $y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$

$$y'(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1}$$

Allora $x(x+2)y'' + (3x-4)y' + y =$

$$\sum_{0}^{\infty} \Big(a_n n(n-1) x^n + 2 a_{n+1}(n+1) n x^n + 3 a_n n x^n - 4 a_{n+1}(n+1) x^n + x^n \Big) =$$

$$\sum_{0}^{\infty} \Big\{ a_n (n^2 - n + 3n + 1) + a_{n+1}\big(2(n+1)(n-2)\big) \Big\} x^n =$$

$$\sum_{0}^{\infty} \Big\{ (n+1)^2 a_n + 2(n+1)(n-2) a_{n+1} \Big\} x^n$$

Se impongo l'equazione trovo

(R') $(n+1)^2 a_n + 2(n+1)(n-2) a_{n+1} = \delta_n$ $\begin{cases} = 9 & \text{se } n=2 \\ = 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$

Se metto $n = 2$ in (R) trovo $9 a_2 = 9 \iff \boxed{a_2 = 1}$

Se $n \neq 2$ la (R) diventa (posso semplificare $n+1 \neq 0$)

$$(R^*) \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{2(2-n)} a_n$$

che per $n = 1$ mi dà $1 = a_2 = \frac{2}{2} a_1 \iff \boxed{a_1 = 1}$

mentre per $n=0$ trovo $1 = a_1 = \frac{a_0}{4} \iff \boxed{a_0 = 4}$

Posso mettere tutto insieme come scritto nel risultato

(b) Poiché a_0 deve fare 4 non è possibile che $y(0)=0$

(c) Noto che in (R) il termine a_3 è poi assegnato ad arbitrio e una volta assegnato $\Rightarrow$ tutti gli a_n sono determinati. Noto anche che $a_3 = \frac{f'''(0)}{6}$. Dunque dato α $\exists$ UNICA LA SOLUZIONE. Inoltre se $\alpha \neq 0 \Rightarrow$ tutti gli $a_n \neq 0 \Rightarrow$ uso il criterio del rapporto

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{2(2-n)} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow R=2$$

(d) Se $y'''(0)=0 \Rightarrow a_3=0 \Rightarrow a_n=0 \ \forall n \geq 0$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = 4 + x + x^2$$

4. $\left(\square \right.$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16 $\left. \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= x - 4z \\ y' &= -4x + 3y + 8z \\ z' &= 2x - y - 5z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebrica e geometrica (1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{1},\ m_A = \boxed{1},\ m_G = \boxed{1},\quad \lambda_2 = \boxed{-1},\ m_A = \boxed{2},\ m_G = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(3p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$x(t) = \boxed{(2t+1)\, e^{-t}}$

$y(t) = \boxed{e^{-t}}$

$z(t) = \boxed{t\, e^{-t}}$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -4 \\ -4 & 3-\lambda & 8 \\ 2 & -1 & -5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 \\ -1 & -5-\lambda \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} -4 & 3-\lambda \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \dots =$$

$$1 + \lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = (1+\lambda) - \lambda^2 (1+\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda^2)$$

$$(1-\lambda)(1+\lambda)^2 \Rightarrow \text{autov. } \lambda = 1 \text{ semplice}, \ \lambda = -1 \text{ doppio}$$

$\lambda = 1$

$$B_1 = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

trovo $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ nel Ker

$\lambda = -1$

$$B_2 = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

VEDO che HA RANGO 2

$$B_2^2 =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 8 \\ -8 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Ker B_2^2 è dato dai vettori $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ con $x = y + 2z$

se prendo $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ questo sta in Ker B_2^2 e si ha

$$e_2 = B_2 e_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Dunque la terna $e_1\ e_2\ e_3$ è una base di Jordan

e $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Per la (c) NOTO CHE $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e_3 \Rightarrow M^{-1} e_3 = \hat{e}_3$

Dunque

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} \hat{e}_3 =$$

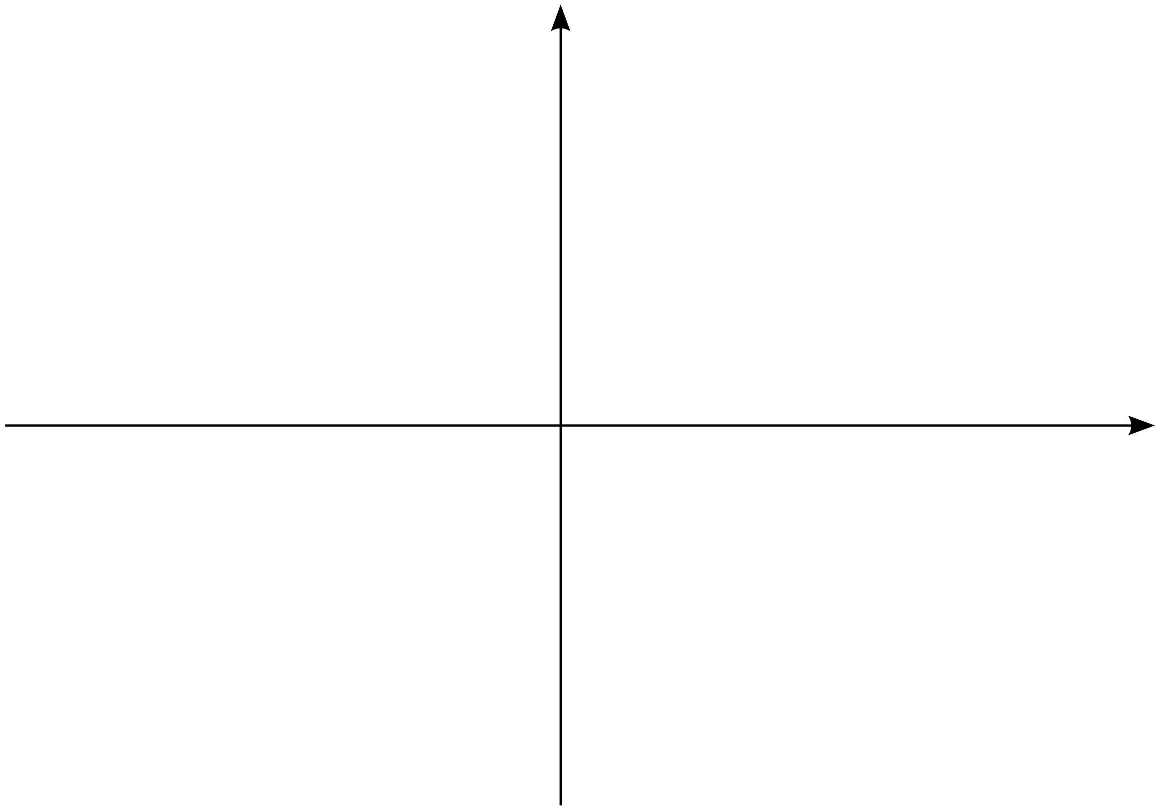
$$M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} M \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 2t + 1 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$$

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(3y + 5x^2)}{x(4y + 3x^2)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovino un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ e successivamente un integrale primo Φ (4p.).

$\lambda(x, y) =$ $\Phi(x, y) =$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1, -1)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Svolgimento