COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 20 luglio 2019 - PARTE A

1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto regolare e sia $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ continua su $\bar{\Omega}$ e $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Si dica (0.5 p. a domanda) quali delle seguenti condizioni sono richieste affinché Γ definisca una superficie parametrica:

   Γ è surgettiva $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$ Γ è iniettiva $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

   $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq 0$ in Ω $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$ $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial v}$ sono linearmente indipendenti in ogni punto $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

   $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq \vec{0}$ in Ω $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$ $\partial\Omega = \emptyset$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$

2. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+3^n n^2} x^n$. Si trovi (1 p. a risposta)

   (a) il raggio di convergenza della serie: $R = \boxed{\frac{3}{2}}$;

   (b) l'intervallo su cui converge la serie: $\boxed{\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]}$;

   (c) l'intervallo su cui converge la serie delle derivate: $\boxed{\left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]}$.

3. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) := -2x^2 - y^2 - 2z^2 + 3xz$. Allora $(0, 0, 0)$ è punto di

   $\boxed{\text{minimo}}$, $\boxed{\cancel{\text{massimo}}}$, $\boxed{\text{né massimo né minimo}}$ (2p.).

4. Si trovi un potenziale U per il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{f}(x, y, z) := e^{x^2+y^2+z^2}(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$. (2p.)

   $U(x, y, z) = \boxed{\frac{1}{2} e^{x^2+y^2+z^2} \quad (+\text{cost.})}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Il teorema del differenziale totale fornisce una **condizione necessaria e sufficiente** per la differenziabilità di una funzione. VERO FALSO (Solo sufficiente)

(b) Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali seconde **continue** in ogni punto, allora la matrice Hessiana di f è definita positiva in ogni punto VERO FALSO (Hf è simmetrica)

(c) Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva **chiusa** di classe $\mathcal{C}^1(a, b)$, allora γ ha lunghezza zero. VERO FALSO

(d) Sia $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo **solenoidale**. Allora per ogni coppia di superfici orientate $(S_1, \hat{\nu}_1)$ e $(S_2, \hat{\nu}_2)$ tali che $\Sigma(S_1) = \Sigma(S_2) =: \Sigma$ e tali che il verso indotto su Σ da $\hat{\nu}_1$ coincide con quello indotto su Σ da $\hat{\nu}_2$, si ha che:

$$\iint_{S_1} \vec{f} \cdot \hat{\nu}_1 \, d\sigma = \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \hat{\nu}_2 \, d\sigma \qquad \text{VERO} \ \text{FALSO}.$$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 20 luglio 2019 - PARTE B   Cognome/Nome:

1. Si considerino $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := x^2 - 2x + 4y^2$ e $M := \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4, y \le 1\}$.
   Si trovino il massimo e il minimo di f su M (6p.)

$\min_{x \in M} f(x) = \boxed{-1}$, $\max_{x \in M} f(x) = \boxed{\frac{49}{3}}$

Svolgimento

Si ha $M = \{(x,y) : g(x,y) \le 0,\ h(x,y) \le 0\}$ dove $g(x,y) = x^2+y^2-4$, $h(x,y) = y-1$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 8y \end{pmatrix}$ $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

I PUNTI DI MAX/MIN SI TROVANO STUDIANDO i seguenti CASI

(1) $\nabla f(x,y) = 0 \quad g(x,y) < 0 \quad h(x,y) < 0 \iff$

$$\begin{cases} 2x-2=0 \\ 8y=0 \\ x^2+y^2<4,\ y<1 \end{cases} \iff \boxed{(x,y) = (1,0)}$$

(2a) $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad g(x,y) = 0 \quad h(x,y) < 0 \iff$

$$\begin{cases} 2x-2 = 2\lambda x \\ 8y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 4,\ y<1 \end{cases}$$ (La seconda riga equivale a $y=0$ oppure $\lambda = 4$) $$\iff \begin{cases} 2x-2 = \lambda x \\ y=0 \\ x^2 = 4,\ y<1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 2x-2 = 8x \\ \lambda = 4 \\ x^2+y^2=4,\ y<1 \end{cases}$$

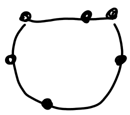
$\iff \boxed{(x,y) = (\pm 2, 0)}$ oppure $\boxed{(x,y) = \left(-1/3, -\frac{\sqrt{35}}{3}\right)}$ (NON VA BENE $\frac{\sqrt{35}}{3} > 1$)

(2b) $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla h(x,y) \quad g(x,y) < 0 \quad h(x,y) = 0 \iff$

$$\begin{cases} 2x-2=0 \\ 8y = \lambda \\ x^2+y^2<4,\ y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ \lambda = 8 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(x,y) = (1,1)}$$

(3) $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) + \mu \nabla h(x,y) \quad g(x,y) = 0 \quad h(x,y) = 0$

$\Rightarrow \boxed{(x,y) = (\pm\sqrt{3}, 1)}$



$1+6+140$

CONFRONTO f in tutti questi punti

$f(1,0) = -1$

$f(2,0) = 0$ $f(-2,0) = 8$ $f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{35}}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 4\cdot\frac{35}{9} = \frac{147}{9} = \frac{49}{3}$

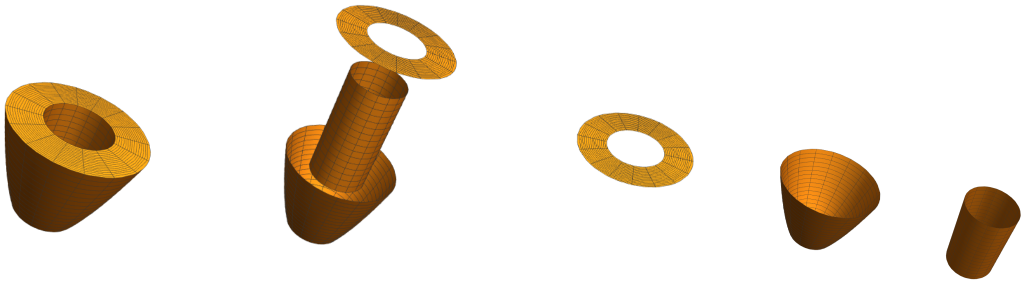
$f(1,1) = 1-2+4 = 3$ $f(\sqrt{3},1) = 3-2\sqrt{3}+4 = 7-2\sqrt{3}$ $f(-\sqrt{3},1) = 7+2\sqrt{3}$

NOTO CHE $7 > 2\sqrt{3}$ ($\iff 49 > 4\cdot 3 = 12$)   DUNQUE IL VALORE PIÙ BASSO È -1

NOTO CHE $8 < 7+2\sqrt{3} < \frac{49}{3}$ ($21+6\sqrt{3} < 49 \iff 6\sqrt{3} < 28 \Leftarrow 6\sqrt{3} < 24 \iff \sqrt{3} < 4$)

DUNQUE IL VALORE PIÙ ALTO È $\frac{49}{3}$

2. Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq z \leq 4\}$. D è un dominio regolare:



D $\qquad$ ∂D $\qquad$ A $\qquad$ B $\qquad$ C

In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera ∂D scomposta nelle tre superfici regolari A, B e C su cui consideriamo la normale $\hat{\nu}$ unitaria uscente da D. Sia anche $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := 2xyz(y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}}) + (x^2+y^2)(z^2-16)\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente A, B e C (0,5 p. a domanda)

$A = \{ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \quad z = 4 \}$

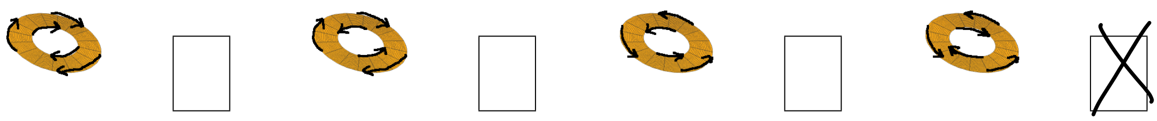
$B = \{ z = x^2+y^2, \quad 1 \leq z \leq 4 \}$

$C = \{ 1 = x^2+y^2, \quad 1 \leq z \leq 4 \}$

(b) Si calcoli $\hat{\nu}$ nei punti $P_0 = (1,-1,4)$ e $P_1 = (1,1,2)$ (0,5+0,5p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{0}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{1}\,\vec{\mathbf{k}} \qquad \hat{\nu}(P_1) = \boxed{2/3}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{2/3}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-1/3}\,\vec{\mathbf{k}}$

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta l'orientazione di $\Sigma(A)$ coerente con $\hat{\nu}$ (0,5p.):



(d) Si calcolino, mostrando i passaggi principali, i seguenti flussi, ($\hat{\nu}$ è sempre quella sopra).

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \frac{225}{4}\pi \qquad (3 \text{ p.})$$

$$\iint_{B} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \frac{225}{4}\pi \qquad (2 \text{ p.})$$

Svolgimento delle parte (d)

(a1) Uso il teorema della divergenza si ha:

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} 2xy^2z + \frac{\partial}{\partial y}(-2x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2)(z^2-16) =$$

$$= 2y^2z - 2x^2z + 2(x^2+y^2)z = 4y^2z$$. Allora

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_D 4y^2z\, dx\,dy\,dz = (\text{coordinate cilindriche})$$

$$\iiint_{\{1\le\rho^2\le z\le 4,\ 0\le\theta\le 2\pi\}} 4\rho^2\sin^2(\theta) z\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz = 4\int_1^4 z\,dz \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta \int_1^{\sqrt{z}} \rho^3 d\rho =$$

$$4\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)d\theta \int_1^4 z\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^{\sqrt{z}} dz = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta \int_1^4 z(z^2-1)\,dz =$$

$$\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{z^4}{4}-\frac{z^2}{2}\right]_1^4 = \pi\left(\frac{4^4}{4}-\frac{4^2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(4^2(4^2-2)+1\right) = \frac{\pi}{4}(16\cdot 14+1) = \frac{225}{4}\pi$$

(a2) Si ha $\iint_{\partial D}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_A \vec{f}\cdot\hat{\nu} + \iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu} + \iint_C \vec{f}\cdot\hat{\nu}$.

- MA SU A si ha $\hat{\nu} = \vec{k} \Rightarrow \vec{f}\cdot\hat{\nu} = f_3(x,y,z)$

e dato che $z = 4 \Rightarrow f_3(x,y,z) = 0$ se $(x,y,z)\in A$. $\Rightarrow \iint_A \vec{f}\cdot\hat{\nu} = 0$

- INOLTRE SU C $\hat{\nu} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (che ha norma 1) e $\hat{\nu}$ è ortogonale a $\vec{f}$. DUNQUE $\iint_C \vec{f}\cdot\hat{\nu} = 0$

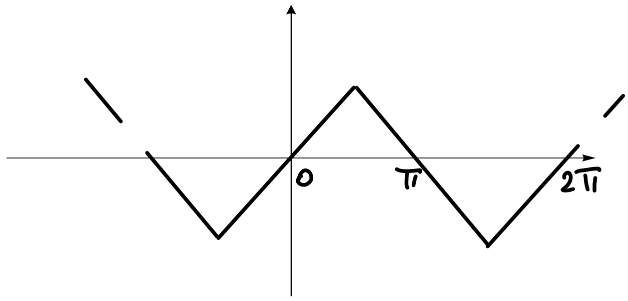
.. IN DEFINITIVA $\iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\partial D}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{se } \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \\ t - 2\pi & \text{se } \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi \end{cases}$$

ed estesa a $\mathbb{R}$ in modo da essere periodica di periodo 2π.

(a) Si tracci il grafico di f nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ (0,5 p.):



(b) Si calcoli (4p.) lo sviluppo in serie di Fourier di f $\left(f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\ \right)$:

$\omega = \boxed{1}$, $a_0 = \boxed{0}$,

$a_n = \boxed{0}$, $b_n = \boxed{\frac{4}{\pi n^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}$, $(n \ge 1)$

(c) Si dica (0,5p. – motivando) se la serie di Fourier converge uniformemente ad f $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

(d) Si usi quanto sopra per calcolare la somma della seguente serie (1p.):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

(e) Sia F la primitiva di f (cioè $F' = f$) tale che $F(0) = 0$. Si trovi (1p.) lo sviluppo in serie di Fourier di F $\left(\text{cioè } F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)\ \right)$:

$\omega = \boxed{1}$, $A_0 = \boxed{0}$,

$A_n = \boxed{\frac{-4}{\pi n^3} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}$, $B_n = \boxed{0}$, $(n \ge 1)$

Svolgimento

- Si vede che f è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$
- $b_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\,dt =$

(per parti) $= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[f(t)\ \frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ perché } f(0)=f(\pi)=0} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt - \frac{2}{n\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)\,dt \qquad \left(f' = \begin{cases} 1 & 0<t<\frac{\pi}{2} \\ -1 & \frac{\pi}{2}<t<\pi \end{cases} \right)$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\Big[\sin(nt)\Big]_0^{\pi/2} - \frac{2}{n^2\pi}\Big[\sin(nt)\Big]_{\pi/2}^{0} =$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n=2k \quad \text{PARI} \\ \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2} & \text{se } n=2k+1 \end{cases}$$

(c) Converge unif. perché $\sum |b_n| < +\infty$ dato che $|b_n| \leq \frac{4}{\pi n^2}$

(d) Calcolo f in $t=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\pi/2)}{n^2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

PERCHÉ $\sin^2(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ 1 & n \text{ DISPARI} \end{cases}$

NE SEGUE che la serie vale $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}$

(e) Se integro per serie trovo

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}\sin(n\pi/2)\frac{\cos(nt)}{-n}$$

che per i teoremi di derivazione sotto il segno di serie è effettivamente primitiva di f. $\Rightarrow$ $A_0 = 0$ $B_n = 0$

$A_n = \frac{-4}{n^3\pi}\sin(n\pi/2)$

4. $\left(\square \right.$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16 $\left. \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= x + y - z \\ y' &= y + z \\ z' &= -y + 3z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebrica e geometrica (1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{1},\ m_A = \boxed{1},\ m_G = \boxed{1},\quad \lambda_2 = \boxed{2},\ m_A = \boxed{2},\ m_G = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(3p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = -1$. (2p.)

$$x(t) = e^{2t}$$

$$y(t) = -t\,e^{2t}$$

$$z(t) = -(1+t)\,e^{2t}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda)+1\right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad B_1 = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ prendo $e_1 \in \operatorname{Ker} B_1$

per esempio $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad B_2 = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Cerco e_3 con $B_2^2 e_3 = 0$ e $B_2 e_3 \neq 0$.

Se $e_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ la condizione $B_2^2 e_3 = 0$ equivale a $x - y + z = 0$. Prendo $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e vedo che

$$B_2 e_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad =: e_2$$

Dunque $A = M J M^{-1}$ con $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

e $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Per trovare la soluzione pongo $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

e noto che $Y_0 = e_3$. Allora

$$Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} e_3$$

$$= M e^{tJ} \hat{e}_3 = M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -t \\ -t-1 \end{bmatrix}$$