COGNOME: | | | | | | | | | | | |

NOME: | | | | | | | | | | | |

MATR.: | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 29 giugno 2019 - PARTE A

1. Si mostri che l'insieme $M := \{(x, y) : x^2y + xy^2 \le 1\}$ è un dominio regolare (2p.)

Sia $g(x,y) = x^2y + xy^2 - 1$. Allora $M = \{(x,y) : g(x,y) \le 0\}$

M è regolare se $\nabla g(x,y) \neq \vec{0}$ per le $(x,y)$ con $g(x,y) = 0$.

Vediamo se è possibile che $\nabla g(x,y) = \vec{0}$ e $g(x,y) = 0$. Allora

$$\begin{cases} 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy = 0 \\ xy(x+y) = 1 \end{cases} \left( \begin{array}{l} \text{se } x=0 \text{ vale la I}^\circ \\ \Rightarrow y=0 \text{ per la II}^a \\ \text{se } y=0 \text{ vale la II}^\circ \\ \Rightarrow x=0 \text{ per la I}^\circ \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ xy(x+y)=1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \\ xy(x+y)=1 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni. Anche nel secondo dalla I e II ottengo $x=0,\ y=0$, perché $\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$. DUNQUE NON CI SONO SOL. $\Rightarrow$ M è REGOLARE

2. Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+n^2} x^n$. Si trovi (1 p. a risposta)

   (a) il raggio di convergenza della serie: $R = \boxed{1/2}$;

   (b) l'intervallo su cui converge la serie: $\boxed{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$;

   (c) l'intervallo su cui converge la serie delle derivate: $\boxed{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[}$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := x^2 + 4xy + 3y^2$. Allora $(0, 0)$ è punto di

   $\boxed{\text{minimo}}$ , $\boxed{\text{massimo}}$ , $\boxed{\cancel{\text{né massimo}}\text{ né minimo}}$ (2p.).

4. Si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{f}(x, y, z) := y\vec{\mathbf{i}} + z\vec{\mathbf{j}} - x\vec{\mathbf{k}}$. (2p.)

$$\vec{F}(x, y, z) = \boxed{\frac{z^2}{2}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-\frac{x^2}{2} - zy}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}}$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e se $\Omega := \{(x, y, z) \ : \ G(x, y, z) < 0\}$, allora $\partial\Omega \subset \{(x, y, z) \ : \ G(x, y, z) = 0\}$. $\boxed{\xcancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

(b) Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali in ogni punto, allora $f$ è continua in $\mathbb{R}^N$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\xcancel{\text{FALSO}}}$

(c) Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è di classe $\mathcal{C}^1(a, b)$, allora $\gamma$ ha lunghezza finita. $\boxed{\xcancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

(d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty]$ è misurabile, allora $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx \right) dy.$

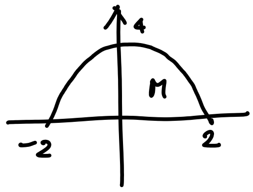
$\boxed{\xcancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 29 giugno 2019 - PARTE B    Cognome/Nome:

1. Si considerino $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := 2xy - 2x - y$ e $M := \{(x,y) : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.
Si trovino il massimo e il minimo di $f$ su $M$ (6p.)

$$\min_{x\in M} f(x) = \boxed{\frac{-161-37\sqrt{37}}{54}}, \qquad \max_{x\in M} f(x) = \boxed{4}$$

*Svolgimento*




• L'insieme $M$ è il sottografico della funzione $y = 4 - x^2$. $M$ è formalmente

$M := \{g_1 \leq 0, g_2 \leq 0\}$ dove $g_1(x,y) = y - 4 + x^2$ $\quad g_2(x,y) = -y$

• Devo trovare:

(a) i punti critici interni a $M$, cioè risolvo

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = 0 \\ g_1(x,y) < 0,\ g_1(x,y) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - 2 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ y < 4 - x^2,\ y > 0 \end{cases} \iff \boxed{x = 1/2,\ y = 2}$$

(che è interno a $M$)

Si può vedere che l'Hessiana di $f$ vale $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ che ha det $< 0$

$\Rightarrow$ $(1/2, 2)$ è di sella e non può essere né di max né di min

(b) I punti critici sulla frontiera "regolare" cioè

$$(b_1) \begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g_1(x,y) \\ g_1(x,y) = 0 \quad g_2(x,y) < 0 \end{cases} \qquad (b_2) \begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda g_1(x,y) \\ g_1(x,y) < 0,\ g_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

Risolvo $(b_1)$:

$$\begin{cases} 2y - 2 = \lambda \cdot 2x \\ 2x - 1 = \lambda \\ y = 4 - x^2,\ y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2x - 1 \\ y - 1 = x(2x-1) \\ y = 4 - x^2,\ y > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2x - 1 \\ y = 1 + 2x^2 - x \\ y = 4 - x^2,\ y > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \lambda = 2x - 1 \\ y = 4 - x^2,\ y > 0. \\ 4 - x^2 = 1 + 2x^2 - x \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 2x - 1, \\ y = 4 - x^2,\ y > 0 \\ 3x^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6} \qquad y = 1 - 4x^2 = \frac{53 \mp \sqrt{37}}{18}$$

$$P_1 := \left(\frac{1 + \sqrt{37}}{6}, \frac{53 - \sqrt{37}}{18}\right) \qquad P_2 = \left(\frac{1 - \sqrt{37}}{6}, \frac{53 + \sqrt{37}}{18}\right)$$

Risolvo (b2)

$$\begin{cases} 2y-2=0 \\ 2x-1=-\lambda \\ y<1-4x^2,\ y=0 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

c) I vertici (che corrispondono ai punti in cui $g_1=g_2=0$) sono $(-2,0)$ e $(2,0)$.

CALCOLO $f$ su tutti questi punti

$f(\frac{1}{2},2) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 - 2\cdot 1 - 2 = -1$ (MA SO GIÀ CHE NON SERVE)

$$f(P_1) = 2\left(\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right)\left(\frac{53-\sqrt{37}}{18}\right) - 2\left(\frac{1+\sqrt{37}}{6}\right) - \left(\frac{53-\sqrt{37}}{18}\right) = \frac{53-\sqrt{37}+53\sqrt{37}-37-18-18\sqrt{37}-159+3\sqrt{37}}{3^3\cdot 2} =$$

$$\frac{-161+37\sqrt{37}}{54}$$

$$f(P_2) = 2\left(\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right)\left(\frac{53+\sqrt{37}}{18}\right) - 2\left(\frac{1-\sqrt{37}}{6}\right) - \left(\frac{53+\sqrt{37}}{18}\right) = \frac{53+\sqrt{37}-53\sqrt{37}-37-18+18\sqrt{37}-159-3\sqrt{37}}{3^3\cdot 2} =$$

$$\frac{-161-37\sqrt{37}}{54}$$

$f(-2,0) = 0-2(-2)-0 = 4$

$f(2,0) = 0-2(2)-0 = -4$

DATO CHE $\frac{-161+37\sqrt{37}}{54} < \frac{-161+37\cdot 7}{54} = \frac{98}{54} < 4$

IL MASSIMO VALE 4

DATO CHE $\frac{-161-37\sqrt{37}}{54} < \frac{-161-37\cdot 6}{54} = \frac{-383}{54} < -4$

IL MINIMO VALE $-\frac{161+37\sqrt{37}}{54}$

2. Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2, x^2+y^2+z^2 \le 4\}$. $D$ è un dominio regolare a tratti ed è rappresentato di sotto:

D L + S

In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera $\partial D$ scomposta nelle due superfici regolari $S$ ed $L$. Sia inolte $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ il campo definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2)(x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}})$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente $S$ ed $L$ e il bordo di $L$ (0,5 p. a domanda)

$S = \{ x^2+y^2+z^2 = 4 \;,\; -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3} \}$

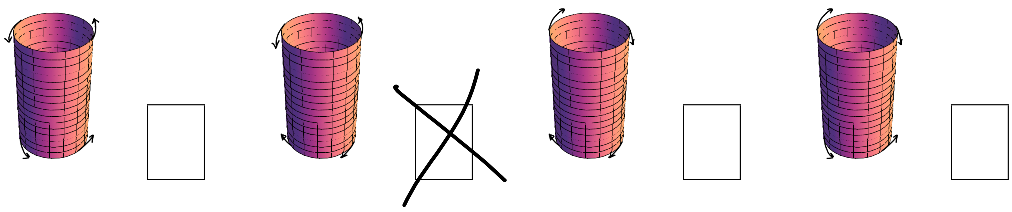
$L = \{ x^2+y^2 = 1 \;,\; -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3} \}$

$\Sigma(L) = \{ x^2+y^2 = 1 \;,\; z^2 = 3 \}$

(b) Si scrivano le normali unitarie uscenti da $D$ nei punti $P_0 = (\sqrt{2}, 1, 1)$ e $P_1 = (0,1,1)$ (0,5+0,5p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{\sqrt{2}/2}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{\sqrt{2}/2}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}}$ $\quad \hat{\nu}(P_1) = \boxed{0}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-1}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}}$

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta la corretta orientazione di $\Sigma(L)$ quando su $L$ si considera la normale uscente da $D$ (0,5p.):



(d) Si calcolino, facendo vedere i passaggi principali, i seguenti flussi:

$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{56\sqrt{3}\pi}$ (3 p.)

$\iint_{L} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{-8\sqrt{3}\pi}$ (2 p.)

*Svolgimento delle parte* (d)

Calcolo la divergenza di $\vec{f}$:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot x + (x^2+y^2+z^2) = 3x^2+y^2+z^2$ ANALOGAMENTE

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2+3y^2+z^2$ $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2+y^2+3z^2 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{f} = 5(x^2+y^2+z^2)$

DUNQUE $\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_D 5(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = 5\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \iint_{\{1\le x^2+y^2\le 4-z^2\}} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy$

$= 5\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{4-z^2}} (\rho^2+z^2)\,\rho\, d\rho$ (coordinate polari in $x,y$) $=$

$= 5\cdot 2\int_0^{\sqrt{3}} dz\; 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}+\frac{z^2\rho^2}{2}\right]_1^{\sqrt{4-z^2}} = 5\pi \int_0^{\sqrt{3}}\left((4-z^2)^2+2z^2(4-z^2)-1-2z^2\right)dz$

$= 5\pi\int_0^{\sqrt{3}}(15-2z^2-z^4)\,dz = 5\pi\left[15z-\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} = 5\pi\sqrt{3}\left(15-\frac{2\cdot 3}{3}-\frac{9}{5}\right)$

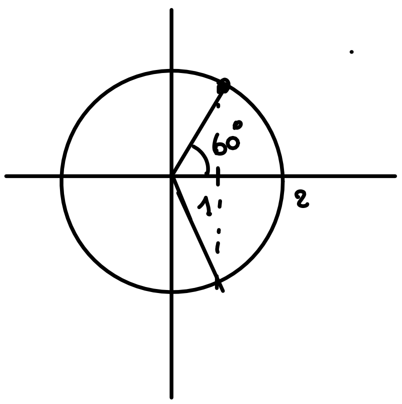
$= 5\pi\sqrt{3}\left(13-\frac{9}{5}\right) = 56\sqrt{3}\pi$

Conviene calcolare il flusso attraverso S dato che su S si ha

$\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \hat{f}\cdot\hat{\nu} = \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot(x^2+y^2+z^2) = (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

$= 4^{3/2}$ (perché su S $x^2+y^2+z^2=4$) $= 8 \Rightarrow$

$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = 8\,\text{Area}(S) = 8\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/6}^{\pi-\pi/6} d\psi\, 4\sin\psi = 64\pi\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin\psi\, d\psi =$




$64\pi\left[-\cos\psi\right]_{\pi/6}^{5/6\pi} = 16\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 64\pi\sqrt{3}$

DUNQUE

$\frac{56}{5}\sqrt{3}\pi = \iint_{\partial D}\hat{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_L \hat{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + \iint_S \hat{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_L \hat{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + 16\sqrt{3}\pi$

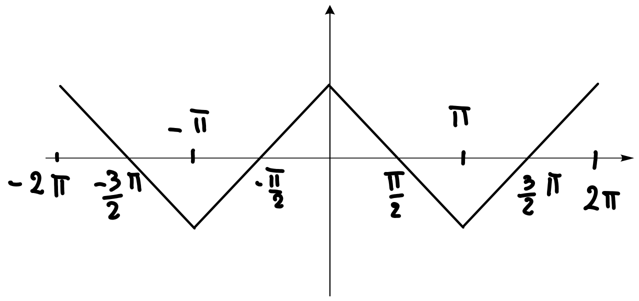
$\Rightarrow \iint_L \hat{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = 56\sqrt{3}\pi - 64\sqrt{3}\pi = -8\sqrt{3}\pi$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - t & \text{se } 0 \leq t \leq \pi \\ t - \frac{3\pi}{2} & \text{se } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

ed estesa a $\mathbb{R}$ in modo da essere periodica di periodo $2\pi$.

(a) Si tracci il grafico di $f$ nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ (0,5 p.):




(b) Si calcoli (4p.) lo sviluppo in serie di Fourier di $f$ ($f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ ):

$\omega = \boxed{1}$, $a_0 = \boxed{0}$,

$a_n = \boxed{\frac{2}{\pi} \frac{(1-(-1)^n)}{n^2}}$, $b_n = \boxed{0}$, $(n \geq 1)$

(c) Si dica (0,5p. – motivando) se la serie di Fourier converge uniformemente ad $f$ ~~SI~~ NO.

(d) Si usi quanto sopra per calcolare la somma della seguente serie (1p.):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

(e) Sia $F$ la primitiva di $f$ (cioè $F' = f$) tale che $F(0) = 0$. Si trovi (1p.) lo sviluppo in serie di Fourier di $F$ (cioè $F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t))$ ):

$\omega = \boxed{1}$, $A_0 = \boxed{0}$,

$A_n = \boxed{0}$, $B_n = \boxed{\frac{2}{\pi} \frac{(1-(-1)^n)}{n^3}}$, $(n \geq 1)$

*Svolgimento*

(a) $f$ è pari $\Rightarrow$ $\boxed{b_n = 0 \ \forall n}$ Chiaramente $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} \boxed{= 0}$$ (SI VEDE ANCHE "A OCCHIO")

Se $n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt) = \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{n^2\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

DUNQUE $\quad f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$ $\quad (*)$

(b) Dato che $|a_n| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}$ che è SOMMABILE $\Rightarrow$ la serie conv. unif

(c) Uso $(*)$ con $t=0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = f(0) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$

(d) Posso provare a integrare la serie termine a termine:

l'integrale di $a_n\cos(nt)$ è $\frac{a_n}{n}\sin(nt) + \text{cost.}$;

Se prendo la costante $=0$ ho che $\left.\frac{a_n}{n}\sin(nt)\right|_{t=0} = 0$

Dunque trovo $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(1-(-1)^n)}{n^3}\sin(nt)$ $\quad (*)(*)$ QUESTA FORMULA È CORRETTA PERCHE' $\quad n\left|\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}$ che è sommabile. Dunque a destra di $(*)(*)$ posso derivare per serie e come derivata trovo proprio $f$. In definitiva

$$A_n = 0 \qquad B_n = \frac{2}{\pi}\frac{(1-(-1)^n)}{n^3}$$

4. ( $\square$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16 )

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -x + 4y - 4z \\ y' &= z \\ z' &= -y + 2z \end{cases}$$

Chiamiamo $A$ la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di $A$ con le relative molteplicità algebrica e geometrica (1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{-1},\ m_A = \boxed{1},\ m_G = \boxed{1},\quad \lambda_2 = \boxed{1},\ m_A = \boxed{2},\ m_G = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per $A$e la relativa forma di Jordan(3p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 2$, $y(0) = 1$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{2e^t}$$

$$y(t) = \boxed{(1-t)e^t}$$

$$z(t) = \boxed{-t\,e^t}$$

*Svolgimento*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \quad p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$-(1+\lambda)\left(\lambda(\lambda-2)+1\right) = -(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

<u>CONSIDERO $\lambda_1 = -1$</u> $\Rightarrow B_1 = A + I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ho rango 2

Trovo $e_1$ nel Ker $B_1$ : se $e_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ deve essere $\begin{cases} 4y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$

Posso prendere $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>CONSIDERO $\lambda_2 = 1$</u> Prendo $B_2 = A - I = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ HA RANGO $2 \Rightarrow m_G(\lambda_2) = 1$

Trovo inoltre $B_2^2 = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ cerco $e_3 \in \operatorname{Ker} B_2^2$ con $B_2 e_3 \neq 0$

La condizione $B^2 e_3 = 0$ equivale a $x = 2(y-z)$. Se prendo $z=0$ $y=1$ trovo $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B_2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) Devo risolvere $Y' = AY$ con $Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

So che $Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} Y_0$ dove

$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ma $Y_0 = e_3$ e so che $M\hat{e}_3 = e_3 \Leftrightarrow M^{-1} e_3 = \hat{e}_3$

dunque $Y(t) = M e^{tJ} \hat{e}_3 = M \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ te^t \\ e^t \end{bmatrix} =$

$e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -t+1 \\ -t \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ 
$x(t) = 2e^t$
$y(t) = (1-t)e^t$
$z(t) = -te^t$

Verifica:
$x'(t) = 2e^t$
$y'(t) = -e^t + (1-t)e^t = -te^t$
$z'(t) = -e^t - te^t = -(1+t)e^t$

$-x(t) + 4y - 4z(t) = e^t(-2 + 4 - 4t + 4t) = 2e^t = x'(t)$ TORNA

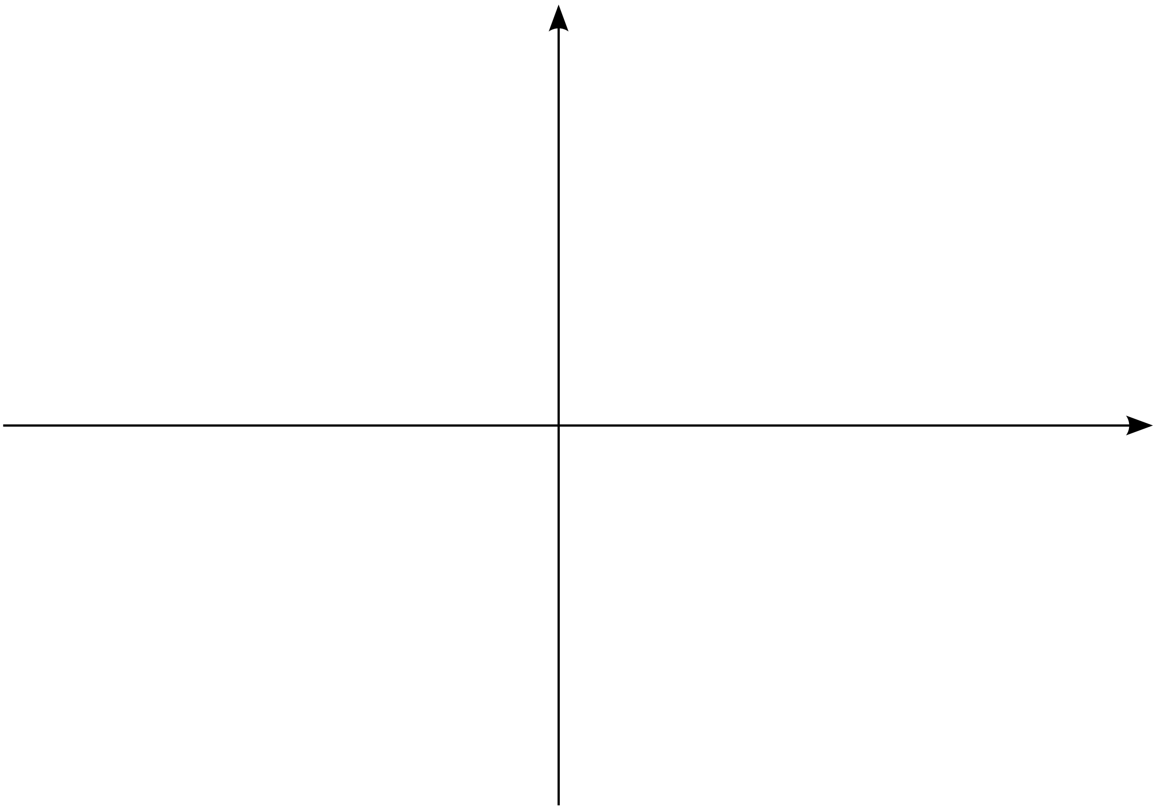
$z(t) = -te^t = y'(t)e^t$ TORNA

$-y(t) + 2z(t) = e^t(-1 + t - 2t) = -(1+t)e^t = z'(t)$ TORNA

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(3y+5x^2)}{x(4y+3x^2)}$$

1. Si dica per quali $(x_0, y_0)$ vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti $(x_0, y_0)$ dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovino un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$ e successivamente un integrale primo $\Phi$ (4p.).

$\lambda(x,y) =$ $\qquad\qquad$ $\Phi(x,y) =$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1,-1)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

*Svolgimento*