COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 8 giugno 2019 - PARTE A

1. Si scriva l'enunciato del teorema di Schwartz (2p.)

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ e se esistono le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $i, j = 1 \dots N$ CONTINUE IN $x_0 \in \Omega$, ALLORA (f è due volte differenziabile in x_0 e)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \qquad i, j = 1 \dots N$$

2. Consideriamo la serie di Fourier $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{1+n^4} \sin(2nt)$. Si dica se (1 p. a risposta)

   (a) f (converge ed) è continua su $\mathbb{R}$ ~~VERO~~ FALSO;
   (b) f è dispari VERO ~~FALSO~~;
   (c) f è periodica di periodo $\boxed{\pi}$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := x^2 - xy + 3y^2$. Allora $(0, 0)$ è punto di

   ~~minimo~~ , massimo , né massimo né minimo (2p.).

4. Si trovi un potenziale per il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x, y) := \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\vec{\mathbf{i}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\vec{\mathbf{j}}$ ($\vec{f}$ è conservativo) (2p.)

$$F(x,y) = \frac{-1}{2(x^2+y^2)}$$

$$\left[\vec{f}(x) = \phi(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \text{ (è radiale) con } \Phi(\rho) = \frac{1}{\rho^3} = \rho^{-3} \Rightarrow \int \phi(\rho)\, d\rho = -\frac{\rho^{-2}}{2} \Rightarrow \text{FORMULA SOPRA} \right]$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e se $\Omega := \{(x, y, z) \;:\; G(x, y, z) < 0\}$, allora $\partial\Omega = \{(x, y, z) \;:\; G(x, y, z) = 0\}$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

(b) Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbb{R}^N$, allora f è continua in $\mathbb{R}^N$ $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

(c) Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è continua, allora γ ha lunghezza finita. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

(d) Se $f : \mathbb{R}^3 \to [-\infty, \infty]$ è integrabile, allora $|f|$ è integrabile. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 8 giugno 2019 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si considerino $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := xy(x^2 - y^2)$ e $M := \{(x, y) : x \geq 1,\ y \geq 1,\ xy \leq 2\}$. Si trovino il massimo e il minimo di f su M (6p.)

$\min_{x\in M} f(x) = \boxed{-6}$, $\max_{x\in M} f(x) = \boxed{6}$

Svolgimento

Posso scrivere $M = \{ g_1(x,y) \le 0,\ g_2(x,y) \le 0,\ g_3(x,y) \le 0 \}$ dove $g_1(x,y) = 1 - x$, $g_2(x,y) = 1 - y$, $g_3(x,y) = xy - 2$ (questi tre vincoli si intersecano bene...). SO CHE M è limitato e chiuso e f è continua $\Rightarrow \exists \max_M f \ \exists \min_M f$

USO I MOLTIPLICATORI $\Rightarrow$ Vedi così

(1) $\begin{cases} \nabla f(x,y) = 0 \\ g_1 < 0 \ g_2 < 0 \ g_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y - y^3 = 0 \\ x^3 - 3xy^2 = 0 \\ x > 1 \ \ y > 1 \ \ xy < 2 \end{cases}$ $\leftrightarrow$ SI VEDE CHE HA SOLO SOL. $(0,0)$ MA $(0,0)$ NON VERIFICA

(2) $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 \\ g_1 = 0 \ \ g_2 < 0 \ g_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y - y^3 = -\lambda \\ x^3 - 3xy^2 = 0 \\ x = 1,\ y > 0,\ xy < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3y^2 = 0 \\ x = 1 \ \ 1 < y < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$ MA NON VA D'ACCORDO CON $1 < y < 2$

(2') $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_2 \\ g_1 < 0 \ \ g_2 = 0 \ g_3 < 0 \end{cases}$ Stessi calcoli di 2' $\Rightarrow$ NO SOLUZIONI

(3) $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_3 \\ g_1 < 0 \ \ g_2 < 0 \ g_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y - y^3 = \lambda y \\ x^3 - 3xy^2 = \lambda x \\ x > 1 \ \ y > 1 \ \ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - y^2 = \lambda \\ x^2 - 3y^2 = \lambda \\ x > 1 \ \ y > 1,\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = x^2 - 3y^2 \\ x > 1 \ \ y > 1,\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 0 \\ x > 1 \ \ y > 1 \ \ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow$ NO SOLUZIONI

(4) INFINE DEVO CONTROLLARE "GLI SPIGOLI" $V_1 = (1,1)$

$V_2 = (1, 2) \quad V_3 = (2, 1)$

Calcolo f di questi punti

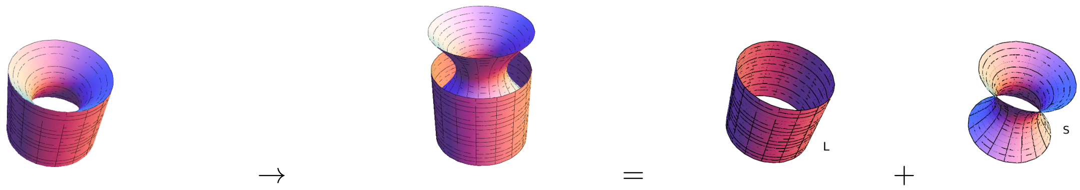
$$f(1,2) = 2(1-4) = -6$$

$$f(2,1) = 2(4-1) = 6$$

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2(2-2) = 0$$

$$f(1,1) = 0$$

2. Sia $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \geq x^2 + y^2 \geq 1 + z^2\}$. D è un dominio regolare a tratti ed è rappresentato di sotto:



In particolare le figure a destra rappresentano la frontiera ∂D scomposta nelle due superfici regolari S ed L. Sia inolte $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ il campo definito da:

$$\vec{f}(x,y,z) := z(y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}} + x^2\vec{\mathbf{k}})$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente S ed L (0,5 p. a domanda)

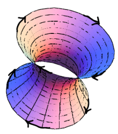
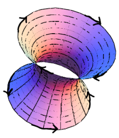
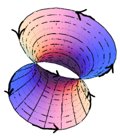
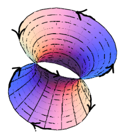
$S = \boxed{\{ x^2+y^2 = z^2+1 \ , \ -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3} \}}$

$L = \boxed{\{ x^2+y^2 = 4 \quad -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3} \}}$

(b) Si scrivano le normali unitarie uscenti da D nei punti $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $P_1 = (1,1,1)$ (0,5+0,5p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{1/\sqrt{2}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{1/\sqrt{2}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{k}} \qquad \hat{\nu}(P_1) = \boxed{-1/\sqrt{3}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{-1/\sqrt{3}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{1/\sqrt{3}}\,\vec{\mathbf{k}}$

(c) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta la corretta orientazione di $\Sigma(S)$ quando su L si considera la normale uscente da D (0,5p.):

 ☐  ☐  ☐  ☒

(d) Si calcolino, facendo vedere i passaggi principali, i seguenti flussi:

$\displaystyle\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{5}\,28}$ (3 p.)

$\displaystyle\iint_{S} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{5}\,28}$ (1,5 p.)

Svolgimento delle parte (d)

Per il primo uso la divergenza. Noto che $\operatorname{div} \vec{f} = x^2 \Rightarrow$

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_D x^2\, dx\, dy\, dz = \text{(coord. cilindriche)}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\tilde{D}} \rho^2 \cos^2\theta\, \rho\, d\rho\, dz \quad \text{dove } \tilde{D} = \{(\rho, z) : -\sqrt{3} \leq z \leq \sqrt{3}, \sqrt{1+z^2} \leq \rho \leq 2\}$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_{\sqrt{1+z^2}}^{2} \rho^3 \, d\rho = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=\sqrt{1+z^2}}^{\rho=2} dz =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(16 - (1+z^2)^2 \right) dz = \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(16 - 1 - 2z^2 - z^4 \right) dz =$$

$$\frac{\pi}{2} \left[15 - \frac{2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left(15 - \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{9}{5} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \left(13 - \frac{9}{5} \right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \, \frac{56}{5} = \frac{\pi\sqrt{3}}{5} \, 28$$

- Notiamo ora che $\vec{f}$ è perpendicolare a L e

dunque $\iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = 0 \Rightarrow$ dall'integrale su $\partial D = L \cup S$

si trova che $\frac{\pi\sqrt{3}}{5} 28 = \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \underbrace{\iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma}_{=0} + \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$

$\Rightarrow$ Trovo l'integrale su S

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$x(4-x)y'' + 4(x-1)y' - 4y = 0$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (2p.):

$(\mathcal{R})$ $\boxed{4(n+1)(n-1)a_{n+1} = (n-1)(n-4)a_n \quad \forall n.}$

oppure

$\boxed{a_1 = -a_0, \quad a_{n+1} = \dfrac{(n-4)}{4(n+1)} a_n \quad \forall n \geq 2}$

(b) Si dica, giustificando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 1$ e se è unica (2p.).

[ ] esiste unica   [X] esiste non unica   [ ] non esiste

(c) Si mostri che esiste un'unica soluzione y tale che $y'(0) = y''(0) = 48$ e la si calcoli esplicitamente (2p.).

$$y(x) = \boxed{48 - 48x + 24x^2 - 4x^3 + \frac{x^4}{4}}$$

Svolgimento

Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$, $\quad x y'(x) = \sum_{\substack{n=1\\(n=0)}}^{\infty} n a_n x^n$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{\substack{n=1\\(n=0)}}^{\infty} (n+1)n\, a_{n+1} x^{n-1}$

$x^2 y''(x) = \sum_{\substack{n=2\\(n=0)}} n(n-1) a_n x^n \qquad x\, y(x) = \sum_{\substack{n=1\\(n=0)}} (n+1)n\, a_{n+1} x^n$

$\Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(4n(n+1)a_{n+1} - n(n-1)a_n + 4n a_n - 4(n+1)a_{n+1} - 4a_n\right) x^n \right.$

$= \sum \left\{ 4(n+1)(n-1)a_{n+1} - (\underbrace{n^2 - n - 4n + 4}_{= n^2 - 5n + 4 = (n-1)(n-4)}) a_n \right\} x^n$

$\Rightarrow \mathcal{R}: \quad 4(n+1)(n-1)a_{n+1} = (n-1)(n-4)a_n \quad \forall n.$

NOTO CHE PER $n=1$ HO $0=0$ Dunque nessuna informazione.

Se $n=0$ ottengo $-4a_1 = 4a_0 \iff a_1 = -a_0$

POSSO ALLORA RISCRIVERE $\mathcal{R}$

R $\boxed{a_1 = -a_0}$, $\boxed{a_{n+1} = \frac{(n-4)}{4(n+1)} a_n \quad n \geq 2}$

VEDO ANCHE CHE per $n = 4$ ottengo $a_5 = 0 \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k \geq 5$

e quindi posso scrivere

$(n=2)$ $\boxed{a_3 = -\frac{a_2}{6}}$ $(n=3)$ $\boxed{a_4 = -\frac{a_3}{16} = \frac{a_2}{96}}$

e $a_n = 0 \ \forall n \geq 5$ — sono LIBERI (per esempio) a_0 e a_2

Da questa discussione emerge che (b) le soluzioni con $y(0) = 1$

sono $1 - x + a_2\left(x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{96}\right)$ NON UNICA (a_2 VARIA IN $\mathbb{R}$)

(c) Se impongo $y''(0) = 48$ impongo $a_2 = \frac{48}{2} = 24 \Rightarrow$

$$y(x) = 48 - 48x + 24x^2 - \frac{24}{6}x^3 + \frac{24}{96}x^4 =$$

$$48 - 48x + 24x^2 - 4x^3 + \frac{x^4}{4}$$

4. $\left(\boxed{} \text{ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16} \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= 3x - 4y + 4z \\ y' &= 2x - 4y + 5z \\ z' &= x - 3y + 4z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Diamo per buono che A ha un solo autovalore λ e siano m_A ed m_G le molteplicità algebrica e geometrica di λ. Allora (1p.):

$$\lambda = \boxed{1}, \quad m_A = \boxed{3}, \quad m_G = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(3p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{2} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{(2t+1)e^t}$$

$$y(t) = \boxed{(2t - t^2/2)e^t}$$

$$z(t) = \boxed{(t - t^2/2)e^t}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ 2 & -(4+\lambda) & 5 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$-(3-\lambda)(4+\lambda)(4-\lambda) - 20 - 24 + (3-\lambda)15 + (4+\lambda)\cdot 4 + (4-\lambda)\cdot 8 =$$

$$= (\lambda-3)(16-\lambda^2) - 44 + 45 - 15\lambda + 16 + 4\lambda + 32 - 8\lambda =$$

$$16\lambda - \lambda^3 - 48 + 3\lambda^2 + 49 - 19\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 3$$

$$= (\lambda-1)^3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{con} \quad m_A = 3$$

$B := A - I = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ B ha rango 2 $\Rightarrow$ Ker B ha dim. 1

$\Rightarrow m_G = 1$ CALCOLO B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$ ha rango 1

Prendo e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$. per esempio $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(=: e_1)$ e $B e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(=: e_2)$

DUNQUE POSSO PRENDERE $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} = e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1}.$$

Per risolvere il problema differenziale uso la formula

$Y(t) = e^{tA} Y_0$ dove $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$Y(t) = e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1} Y_0.$$

Ma $Y_0 = e_3$ e $M \hat{e}_3 = e_3$

$\Rightarrow M^{-1} e_3 = \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$Y(t) = e^t M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^t M \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

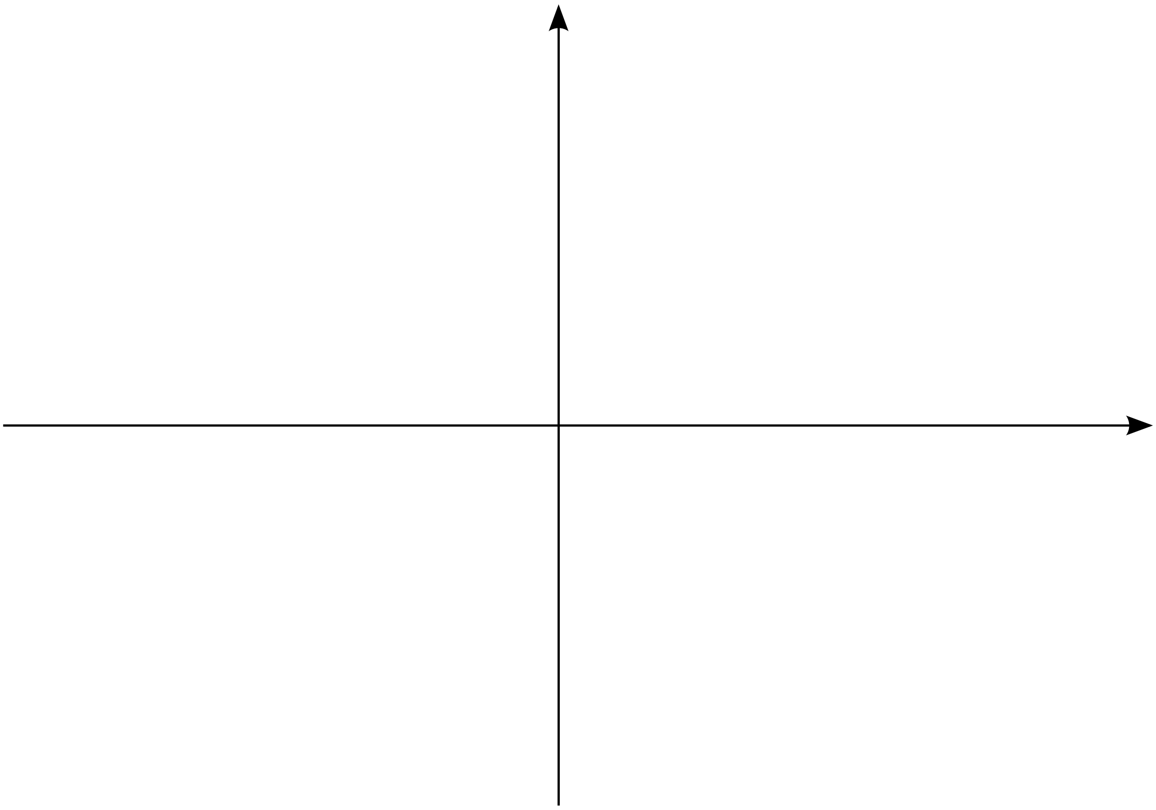
$$e^t \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 0 + 2t + 1 \\ -t^2/2 + 2t + 0 \\ -t^2/2 + t + 0 \end{bmatrix}$$

Variante esercizio 3 della seconda parte: solo gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{x(x^4 - y^2)}{y(x^2 - y^4)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovi un integrale primo per l'equazione Φ (3p.).

$\Phi(x, y) =$

3. Si disegni nel diagramma della pagina precedente la soluzione $y(x)$ tale che $y(\sqrt{3/2}) = \sqrt{3/2}$ (1p.); detto $]\underline{x}, \overline{x}[$ l'intervallo massimale su cui tale y è definita si ha (1p.):

$\underline{x} =$ $\qquad$ $\overline{x} =$

Svolgimento