COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino D del 8 giugno 2019 - PARTE A[1]

1. Sia $\vec{f}$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$ su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$. Si considerino le seguenti affermazioni:
   (a) $\vec{f}$ è conservativo;
   (b) $\vec{f}$ è irrotazionale;
   (c) per ogni γ curva chiusa regolare a tratti in Ω vale $\int_\gamma \vec{f} \cdot ds = 0$.

   Si dica per ognuna delle seguenti implicazioni se è vera o falsa (1p. a domanda):
   (a) $\Rightarrow$ (b) ~~VERO~~ FALSO (b) $\Rightarrow$ (c) VERO ~~FALSO~~ (c) $\Rightarrow$ (a) ~~VERO~~ FALSO

2. Si dica se i seguenti campi definiti su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sono conservativi (1p. a domanda):
   (a) $\vec{f}(x,y) = \dfrac{y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$ conservativo / ~~non conservativo~~
   (b) $\vec{f}(x,y) = \dfrac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$ ~~conservativo~~ / non conservativo
   (c) $\vec{f}(x,y) = \dfrac{x\vec{\mathbf{i}}}{x^2+y^2}$ conservativo / ~~non conservativo~~

3. Sia $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{f}(x,y,x) = yz\vec{\mathbf{i}} + xz\vec{\mathbf{j}} - xy\vec{\mathbf{k}}$. Allora (1p. a domanda):
   (a) $\vec{f}$ ammette potenziale SI NO;
   (a) $\vec{f}$ ammette potenziale vettore SI NO;

4. Si riporti l'enuciato del teorema di esistenza e unicità di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali di ordine 1(4p.).

   Enunciato:

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ($f = f(t,y)$) una funzione CONTINUA. Se f è anche LIPSCHITZIANA in y uniformemente rispetto t, cioè se esiste $L > 0$ t.c.:

$$\| f(t,y_2) - f(t,y_1) \|_{\mathbb{R}^N} \leq L \| y_2 - y_1 \|_{\mathbb{R}^N} \quad \forall\, y_2, y_1, t \text{ con } (t,y_1) \text{ e } (t,y_2) \in \Omega,$$

allora per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ esiste unica una soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A$\geq$ 4; Voto A+Voto B$\geq$ 10 Tempo: mezzora per la parte A, un ora e mezza per la parte B

Questo significa che

(1) Esiste $\delta > 0$, esiste $y :]x_0-\delta, x_0+\delta[\to \mathbb{R}^N$ di classe C^1 tale che

$$\circledast \quad (t, y(t)) \in \Omega, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \forall\, t \in]t_0-\delta, t_0+\delta[$$

(2) Se $\delta_1 > 0$ $y_1 :]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[\to \mathbb{R}^N$ è C^1 e verifica la $\circledast$ per $t \in]t_0-\delta_1, t_0+\delta_1[$, allora $y(t) = y_1(t)$ per tutte le $t \in]t_0-\delta_2, t_0+\delta_2[$ dove $\delta_2 =$ minimo (δ, δ_1)

1. Si calcoli l'area della superficie S definita da (5p.):

$$S := \{(x,y,z)\ :\ 1 \le z = x^2 + y^2 \le 4\}$$

$A(S) = \boxed{\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)}$.

Svolgimento

S è il grafico della funzione $f : A \to \mathbb{R}$ def. da

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad A = \{1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

DUNQUE (per quanto visto a lezione)

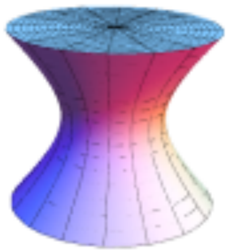
$$A(S) = \iint_A \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy = \iint_A \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy =$$

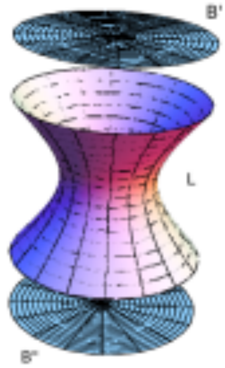
$$\text{(coord. polari)} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \quad \left(\begin{array}{l} s = 4\rho^2 \\ ds = 8\rho\, d\rho \end{array}\right)$$

$$2\pi \int_4^{16} \sqrt{1+s}\, \frac{1}{8}\, ds = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(1+s)^{3/2}\right]_4^{16} =$$

$$\frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right) = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

2. Sia $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2 \leq 4\}$. D è un dominio regolare a tratti ed è rappresentato di sotto:





In particolare la seconda figura rappresenta la frontiera ∂D scomposta nelle tre superfici regolari B', L e B''. Sia inolte $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ il campo definito da:

$$\vec{f}(x, y, z) := z^2(x^3\vec{\mathbf{i}} + y^3\vec{\mathbf{j}}) - (x^2 + y^2)z(z^2 - 1)\vec{\mathbf{k}}$$

Rispettando la nomenclatura così introdotta si risponda ai seguenti quesiti.

(a) Si scrivano analiticamente B', B'' e L (0,5 p. a domanda)

$B' = \boxed{\{(x, y, \sqrt{3}) : x^2 + y^2 \leq 4\}}$

$L = \boxed{\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 + z^2 , -\sqrt{3}\ z \leq \sqrt{3}\}}$

$B'' = \boxed{\{(x, y, -\sqrt{3} : x^2 + y^2 \leq 4\}}$

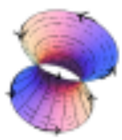
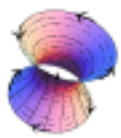
(b) Si scrivano le normali unitarie uscenti da D nei punti $P_0 = (0, 1, -\sqrt{3})$ e $P_1 = (1, 1, 1)$ (1+1p.):

$\hat{\nu}(P_0) = \boxed{0}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{0}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-1}\,\vec{\mathbf{k}}$ $\quad\hat{\nu}(P_1) = \boxed{1/\sqrt{3}}\,\vec{\mathbf{i}} + \boxed{1/\sqrt{3}}\,\vec{\mathbf{j}} + \boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}}}\,\vec{\mathbf{k}}$ (xx p.)

(c) Si scriva il bordo della superficie B' (0,5 p.):

$\Sigma(B') = \boxed{\{(x, y, \sqrt{3}) : x^2 + y^2 = 4\}}$

(d) Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta la corretta orientazione di $\Sigma(L)$ quando su L si considera la normale uscente da D (1p.):

 ☐  ☒  ☐  ☐

(e) Si calcolino, facendo vedere i passaggi principali, i seguenti flussi:

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \boxed{\frac{24\sqrt{3}}{5}\pi} \quad \text{(4 p.)}$$

$$\iint_{L} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \boxed{\frac{184\sqrt{3}\pi}{5}} \quad \text{(2 p.)}$$

Svolgimento delle parte (e)

Si ha $\operatorname{div}\vec{f} = 3x^2z^2 + 3y^2z^2 - (3z^2-1)(x^2+y^2) = x^2+y^2$.

Per il teor. della divergenza:

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \text{(coord. cilindriche)} \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\tilde{D}} \rho^2\,\rho\,d\rho\,dz = (\star)$$

dove $\tilde{D} = \{\rho^2 \le 1+z^2 \le 4\} = \{-\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3},\ 0\le\rho\le\sqrt{1+z^2}\}$ DUNQUE

$$(\star) = 2\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho^3\,d\rho = \frac{\pi}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dz\left[\rho^4\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\pi}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(1+z^2)^2\,dz = \pi\int_0^{\sqrt{3}}(1+2z^2+z^4)\,dz =$$

$$= \pi\left[z+\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5\right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\pi\left(1+\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot 9\right) = \sqrt{3}\pi\left(3+\frac{9}{5}\right) = \frac{24\sqrt{3}}{5}\pi$$

PER L'ALTRO INTEGRALE CONVIENE CALCOLARE IL FLUSSO DI $\vec{f}$ USCENTE DA B' e B''. SU B' $\hat{\nu} = \vec{k}$ mentre su B'' $\hat{\nu} = -\vec{k}$. DUNQUE

$$\iint_{B'} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2\le 4\}} f_3(x,y,\sqrt{3})\,dx\,dy = -\iint_{\{x^2+y^2\le 4\}}(x^2+y^2)\,2\sqrt{3}\,dx\,dy = -2\sqrt{3}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 \rho^2\rho\,d\rho =$$

$$= -4\pi\sqrt{3}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = -16\sqrt{3}\pi$$

sono eguali

$$\iint_{B''} \vec{f}\cdot\hat{\nu} = \iint_{\{x^2+y^2\le 4\}} -f_3(x,y,-\sqrt{3})\,dx\,dy = -\iint_{\{x^2+y^2\le 4\}}(x^2+y^2)\,2\sqrt{3}\,dx\,dy = -16\sqrt{3}\pi$$

$$\Rightarrow \frac{24\sqrt{3}\pi}{5} = \iint_{\partial D}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{B'}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_{L}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_{B''}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma =$$

$$-16\sqrt{3}\pi + \iint_L \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma - 16\sqrt{3}\pi \iff$$

$$\iint_L \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \frac{24\sqrt{3}\pi}{5} + 32\sqrt{3}\pi = \frac{184\sqrt{3}\pi}{5}$$

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -y + z \\ y' &= x - y + z \\ z' &= -x + y - 2z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Diamo per buono che A ha un solo autovalore λ e siano m_A ed m_G le molteplicità algebrica e geometrica di λ. Allora (1p.):

$$\lambda = \boxed{-1}, \quad m_A = \boxed{3}, \quad m_G = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(4p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$. (3p.)

$$x(t) = \boxed{(1 + t - t^2/2)e^{-t}}$$

$$y(t) = \boxed{t e^{-t}}$$

$$z(t) = \boxed{(t^2/2 - t)e^{-t}}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1+\lambda)(2+\lambda) + 1 + 1 + \lambda - (1+\lambda) - (2+\lambda) = -\lambda(2+3\lambda+\lambda^2) - 1 - \lambda =$$

$$-2\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 - 1 - \lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(1+\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

HA RANGO 2 $\Rightarrow$ dim Ker = 1 $\Rightarrow m_G = 1$

$$B = A + I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (B^3 = 0)$$

Cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$. Per esempio $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Viene:

$$e_1 = B^2 e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_2 = B e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pongo $M = \left[e_1 \middle| e_2 \middle| e_3 \right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; allora

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} = e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1}$$

Se voglio la soluzione con $Y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ noto che $Y_0 = e_3$

da cui $M^{-1} Y_0 = M^{-1} e_3 = \hat{e}_3$ (dato che $M \hat{e}_3 = e_3$) $\Rightarrow$

$$Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} e_3 = M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -t^2/2 + t + 1 \\ t \\ t^2/2 - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Verifico
$$x'(t) = e^{-t}\left(t^2/2 - t - 1 - t + 1 \right) = e^{-t}\left(t^2/2 - 2t \right)$$
$$y'(t) = e^{-t}(-t+1)$$
$$z'(t) = e^{-t}\left(-t^2/2 + t + t - 1 \right) = e^{-t}\left(-t^2/2 + 2t - 1 \right)$$

$$-y(t) + z(t) = e^{-t}\left(-t + t^2/2 - t \right) = e^{-t}\left(t^2/2 - 2t \right) = \underline{\underline{x'(t)}}$$

$$x(t) - y(t) + z(t) = e^{-t}\left(-t^2/2 + t + 1 - t + t^2/2 - t \right) = e^{-t}(-t+1) = \underline{\underline{y'(t)}}$$

$$-x(t) + y(t) - 2z(t) = e^{-t}\left(t^2/2 - t - 1 + t - t^2 + 2t \right) = e^{-t}\left(-t^2/2 + 2t - 1 \right) = \underline{\underline{z'(t)}}$$

$$Y(0) = e^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad !!!$$