COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino C del 17 aprile 2019 - PARTE A[1]

1. Si dica qual è il raggio di convergenza $\bar{R}$ della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{1+n3^n}$ (1p.) e si indichi inoltre l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ delle x su cui la serie converge (1p.):

   $\bar{R} = \boxed{3}$, $A = \boxed{]-3, 3]}$.

   Detta $f(x)$ la somma della serie scritta sopra si trovi (1p.):

   $$f'''(0) = \boxed{-\frac{3}{41}} / \boxed{\text{non esiste}}.$$

2. Consideriamo la seguente serie trigonometrica in $\mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} e^{int}$. Diamo per buono che la serie converge per ogni t a una funzione $f(t)$ (a valori complessi). Allora (1p. a risposta):

   (a) La serie converge totalmente. [SI] [~~NO~~]

   (b) per ogni $t \in \mathbb{R}$ $f(t)$ è [reale]/[~~immaginaria pura~~]/[nessuna delle precedenti]

   (c) f è [pari]/[~~dispari~~]/[né pari né dispari].

   (d) f ha energia finita [~~SI~~] [NO].

3. Siano $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue e tali che $0 \leq f_n(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Supponiamo che le f_n convergano puntualmente a una $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Si dica quali delle seguenti proprietà è sicuramente vera (1p. ciascuna)

   (a) $0 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$. [~~SI~~] [NO]

   (b) f è continua. [SI] [~~NO~~]

   (c) f è misurabile. [~~SI~~] [NO]

   (d) Se $f = 0$ allora gli integrali $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ tendono a zero (per $n \to \infty$). [~~SI~~] [NO]

4. Sia (f_n) una successione di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ sull'intervallo $[0,1]$ e supponiamo che le f_n convergano puntualmente a una $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Si scriva un teorema (tra quelli studiati) che implichi che f sia derivabile e che le f_n' convergano puntualmente a f' (3p.).

   Enunciato:

   Se $f_n : I \to \mathbb{R}$ sono di classe C^1, se $f, g : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ intervallo), se

   · $f_n \to f$ puntualmente su I,

   · $f_n' \to g$ uniformemente su I,

   allora f è C^1 e $f' = g$ ($\Rightarrow f_n' \to f'$ unif/pt.)

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A≥ 4; Voto A+Voto B≥ 10 Tempo: mezzora per la parte A, un ora e mezza per la parte B

(1) $R = \frac{1}{L}$ dove $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+n3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^{-n}+n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}$

Se metto $x = 3$ trovo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{-n}+n}$ che converge per Leibniz

se metto $x = -3$ trovo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{-n}+n}$ che diverge dato che $\frac{1}{3^{-n}+n} \sim \frac{1}{n}$

(2) • $\|f_n\|_\infty = \frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n}$ che non è sommabile

• I c_n sono dati da $c_n = \frac{n}{1+n^2}$ dunque $c_{-n} = -c_n \Rightarrow f$ è dispari

però f non è reale dato che $c_{-n} \neq \overline{c_n}$. Se considero

$c_n' = i\, c_n \Rightarrow \overline{c_n'} = c_{-n}'$ che vuol dire che

$i\, f(x)$ è reale $\Leftrightarrow f$ è immaginaria pura

• Supponiamo che $\mathcal{E}(f) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2$ e questa serie è convergente

dato che $c_n^2 = \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \sim \frac{1}{n^2}$

(3) (a) Se $0 \le f_n(x) \le 1$ e $f_n(x) \to f(x) \Rightarrow 0 \le f(x) \le 1$

(b) Ci sono: controesempi visti a lezione — per la continuità di f ci vorrebbe la convergenza uniforme

(c) Se $f_n \to f$ puntualmente, e f_n misurabili $\Rightarrow f$ misurabile (è una delle proprietà viste a lezione)

(d) Dato che $0 \le f_n \le 1 \Rightarrow |f_n| \le 1 =: g$ e la g è integrabile su $[0,1] \Rightarrow$ Posso applicare Lebesgue e ottenere $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$ (= 0 per ipotesi)

Ingegneria Aerospaziale, Compitino C del 17 aprile 2019 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) := \sinh(t)$ se $-\pi < t < \pi$, $f(\pi) = 0$, ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da risultare 2π-periodica. Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier di f (5p.):

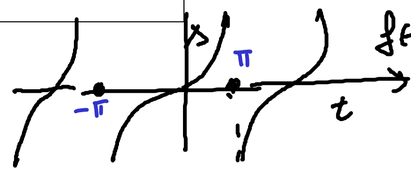
$\omega = \boxed{1}$, $a_0 = \boxed{0}$, $a_n = \boxed{0}$, $b_n = \boxed{-\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n n \sinh(\pi)}{1+n^2}}$.

Si dica, giustificando, se la serie converge uniformemente (1p.) SI ~~NO~~.

Si usi quanto trovato per calcolare (2p.) la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \boxed{\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sinh(\pi)\cosh(\pi) - \pi}{\sinh^2(\pi)}\right)}$$

Svolgimento



(a) È chiaro che f è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

È chiaro che $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Allora se $n \geq 1$

$$(*)\ b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh(t)\sin(nt)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\cosh(t)\underbrace{\sin(nt)}_{=0 \text{ per il seno}}\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh(t)\, n\cos(nt)\,dt =$$

$$-\frac{2}{\pi}n\Big[\sinh(t)\cos(nt)\Big]_0^{\pi} + \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh(t)(-n)\sin(nt)\,dt =$$

$$-\frac{2n}{\pi}\sinh(\pi)\cos(n\pi) - n^2\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sinh(t)\sin(nt)\,dt = -\frac{2}{\pi}(-1)^n n - n^2 b_n$$

$$\Rightarrow (1+n^2)\,b_n = -\frac{2}{\pi}(-1)^n n \sinh(\pi) \Leftrightarrow \boxed{b_n = -\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}\sinh(\pi)}$$

$(*)$ $b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sinh(t)\sin(nt)\,dt$ perché $f(t) = \sinh(t)$ per quasi ogni t

Per i teoremi noti (f è regolare a tratti)

$$f(t) = -\frac{2}{\pi}\sinh(\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}\sin(nt) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(b) Se la serie convergesse unif $\Rightarrow$ f sarebbe continua e questo è falso nei punti $\pm\pi$ $(+2k\pi)$

(c) Uso l'uguaglianza di Parseval:

$$(P)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2.$$

Parseval reale

$$\int_0^T f(t)^2\,dt = T a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = T\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^2$$

Si ha $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}\,dt = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cosh(2t) - 1}{2}\right)$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} - 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\pi}}{2} - 2\pi - \frac{e^{-2\pi}}{2}\right) = \frac{\sinh(2\pi) - 2\pi}{2}$$

$$= \sinh(\pi)\cosh(\pi) - \pi$$

Da (P) ottengo allora

$$\frac{\sinh(\pi)\cosh(\pi) - \pi}{\pi} = \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \sinh^2(\pi) \iff$$

$$\sum \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sinh(\pi)\cosh(\pi) - \pi}{\sinh^2(\pi)}\right) = \frac{\pi}{4}\cosh(\pi) \frac{-\pi^2}{16 \cdot \sinh^2(\pi)}$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$x(2-x)y'' - 2y' + y = x$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (2p.):

($\mathcal{R}$) $a_{n+1} = \dfrac{n^2-n-1}{2(n^2-1)} a_n$ se $n \geq 2$ $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ (a_2 libero)

(b) Si dica, giustifcando, se esiste una soluzione dell'equazione tale che $y(0) = 0$ (2p.).

esiste ~~non esiste~~

(c) Si mostri che, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione ha un'unica soluzione soluzione tale che $y''(0) = \alpha$; si trovi il raggio di convergenza (della serei che definisce y) nel caso $\alpha = 1$ (2p.):

$R =$ 2.

(d) Si trovi esplicitamente (2p.) la soluzione y tale che $y''(0) = 0$:

$y(x) =$ $2 + x$

Svolgimento

Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ allora $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$

$y''(x) = \sum_{\substack{n=2 \\ (n=0)}}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n=0)}}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n\, x^{n-1}$. Dunque

$x(2-x)y'' - 2y' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2a_{n+1}(n+1)n - a_n n(n-1) - 2a_{n+1}(n+1) + a_n\right) x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+1}\left(2(n+1)n - 2(n+1)\right) - a_n\left(n(n-1) - 1\right)\right] x^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n^2-1) a_{n+1} - (n^2-n-1) a_n \right] x^n$. Impongo che sia eguale a x:

($\mathcal{R}$) $2(n^2-1) a_{n+1} = (n^2-n-1) a_n + \delta_{n,1}$ dove $\delta_{n,1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$

se metto $n = 1$ trovo $0 = -a_1 + 1 \iff \boxed{a_1 = 1}$.

se metto $n = 0$ trovo $-2a_1 = -a_0 \iff \boxed{a_0 = 2}$.

Posso allora riscrivere (R) come

(R')
$$a_{n+1} = \frac{n^2-n-1}{2(n^2-1)} a_n \quad \text{se } n \geq 2 \qquad a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ (a_2 \text{ libero})$$

Si vede che n^2-n-1 non ha radici intere $\Rightarrow$ se $a_2 \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0\ \forall n \geq 2$

Se invece $a_2 = 0 \Rightarrow a_n = 0\ \forall n \geq 2$.

(b) Dai conti fatti sopra ogni soluzione $y(x)$ ha

$y(0) = a_0 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Non esiste sol. con $y(0)=0$

(c) Segue da (R') dato che $y''(0) = 2a_2$ e quindi una volta assegnato $y''(0)$ risulta assegnato a_2 e gli a_n sono tutti univocamente determinati. Se $2 \neq 0$, cioè $a_2 \neq 0$ posso applicare Cesaro e ottenere (R = raggio di convergenza)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2-n-1}{2(n^2-1)}\right| = \frac{1}{2}$$

e quindi $R = 2$

(d) Se $y''(0) = 0 \Rightarrow a_n = 0\ \forall n \geq 2 \Rightarrow y(x) = 2 + x$

3. Siano $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) := x^2 e^{-nx^2}$. Si dica (giustificando) se:

(a) $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$ (1p) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(b) $f_n \to 0$ in energia su $\mathbb{R}$ (2p) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(c) la serie $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge per ogni $x \geq 0$ (1p) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(d) la funzione f sopra introdotta è continua in $]0, +\infty[$ (2p.) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(e) si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (1p.) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(f) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ (2p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$.

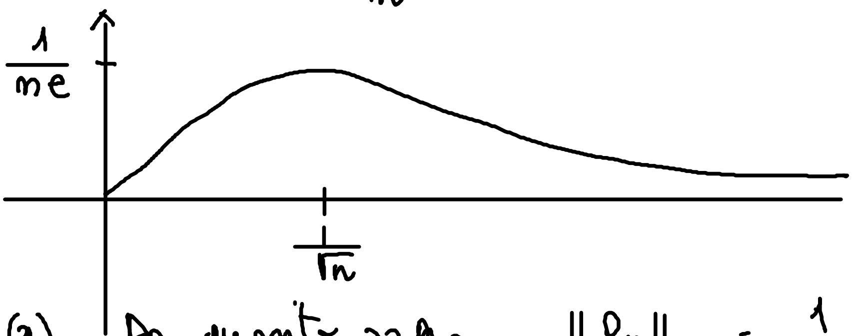
(g) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in energia su $\mathbb{R}$ (2p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

Svolgimento

Studiamo f_n. $f_n(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0$ (vince l'esponenziale)

$f_n'(x) = 2x e^{-nx^2} + x^2(-2nx) e^{-nx^2} = 2x e^{-nx^2}(1 - nx^2)$. $\quad f'(x) = 0 \underset{(x>0)}{\iff} x = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{e^{-1}}{n}$.



$\left(f_n \xrightarrow{L_2} f \iff \|f_n - f\|_2 \to 0 \qquad \text{qui } f = 0 \ .. \right)$

(a) Da quanto sopra $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{ne} \to 0 \Rightarrow f_n \to 0$ UNIF.

(b) $\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} f_n^2(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-2nx^2}\,dx$. Cambio variabile

$y = \sqrt{n}\, x \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sqrt{n}}$ e $\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2} y^4 e^{-2y^2} \frac{dy}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} y^4 e^{-2y^2}\,dy$

Ne segue che $\|f_n\|_2 = \frac{1}{n^4\sqrt{n}} \sqrt{\int_0^{+\infty} y^4 e^{-2y^2}\,dy} \to 0$ per $n \to \infty$

(c) Se $x = 0$ $f_n(0) = 0 \Rightarrow$ la serie converge. Se $x > 0$ $x^2 e^{-nx^2}$ è sommabile

$\Rightarrow$ di nuovo la serie converge.

(d) Prendo $\varepsilon > 0$. Dal grafico sopra vedo che

$$\|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = \max_{x \geq \varepsilon} |f_n(x)| = \begin{cases} \frac{1}{ne} & \text{se } \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon \text{ cioè } n \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \\ \varepsilon^2 e^{-n\varepsilon^2} & \text{se } n > \frac{1}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

Dato che gli $n \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ sono in numero finito $\|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} \simeq \varepsilon^2 e^{-n\varepsilon^2}$

e so che $\sum_1^{\infty} e^{-n\varepsilon^2} < +\infty \Rightarrow \sum_1^{\infty} \|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} < +\infty \Rightarrow$

la serie converge tot. su $[\varepsilon, +\infty[\Rightarrow f$ è continua in $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow f$ è continua su $]0, +\infty[$

(e) Dal punto (d) si ricava che

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

(f) Prendo $x = \frac{1}{\sqrt{m}}$ con m intero. Allora

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-\frac{n}{m}} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} e^{-\frac{n}{m}} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} e^{-1} = \frac{e^{-1}}{m} \sum_{n=1}^{m} 1 = \frac{1}{e}$$

Dato che $\frac{1}{\sqrt{m}} \to 0$ e $f\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \geq \frac{1}{e}$ $\Rightarrow$ f non può avere limite 0 per $x \to 0$

$\Rightarrow$ f non è continua in $x=0$ $\Rightarrow$ f non può essere unif. conv.

(g) Dai conti fatti sopra $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{costante}}{n^{5/4}} < +\infty$

perché $\frac{5}{4} > 1$. Dal criterio di convergenza assoluta in L^2

$\Rightarrow$ la serie converge in energia

- $\sum f_n$ dove $\boxed{\langle f_n, f_m \rangle = 0}$, $\langle f_n, f_m \rangle = \int f_n \overline{f_m}$

converge se $\sum \|f_n\|^2 < +\infty$

- IN GENERALE se X spazio con una norma $\| \ \|$

e se X è COMPLETO $\Rightarrow$

$$\sum \|f_n\| < +\infty \Rightarrow \sum f_n \text{ converge}$$

L^2 è completo

SERVE $\sum \|f_n\|_2 = \sum \sqrt{\int f_n^2 \, dx}$

$f_n(x) = x^2 e^{-nx^2}$ domanda $f_n \xrightarrow{L^2} 0$??

$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} (x^2 e^{-nx^2})^2 \, dx}$ sostituzio...

$\|f_n\|_2 = \text{cost}\ n^{-5/4} \longrightarrow 0$ QUINDI $f_n \xrightarrow{L^2} 0$

POI MI POSSO CHIEDERE SE $\sum f_n$ CONVERGE

POSSO PROVARE LA CONV. TOTALE IN L^2

$$\sum \|f_n\|_2^{\cancel{2}} = \sum \frac{\text{cost}}{n^{5/4}} < +\infty \qquad 5/4 > 1$$

$$\sum |c_n| < +\infty \;\underset{\cancel{\Longleftarrow}}{\Longrightarrow}\; \sum |c_n|^2 < +\infty$$