COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 22 marzo 2019 - PARTE A[1]

1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e siano $V \subset \Omega$ un vincolo regolare e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Se $x_0 \in V$ è punto di massimo o minimo relativo per f su V allora (2p.) il vettore $\nabla f(x_0)$:

   $\boxed{\text{è nullo}}$ $\boxed{\text{è in } V}$ $\boxed{\text{è normale a } V}$ $\boxed{\text{è tangente a } V}$ $\boxed{\text{nessuna di queste}}$.

2. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Consideriamo il "grafico di f":

$$G_f = \{(x, y) : x \in \Omega, y = f(x)\}.$$

   Allora:

   a) G_f è un vincolo regolare (in $\mathbb{R}^{N+1}$) solo se ∇f è non nullo in Ω $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (1p.);

   b) nel caso G_f sia un vincolo regolare e $P_0 = (x_0, y_0) \in G_f$, allora quale di questi vettori è normale a G_f in P_0 (2p.):

   $\boxed{\nabla f(x_0)}$ $\boxed{(\nabla f(x_0), 0))}$ $\boxed{(\nabla f(x_0), 1)}$ $\boxed{(\nabla f(x_0), -1)}$ $\boxed{\text{nessuno di questi}}$.

3. Sia $D := \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$. Si calcoli (3p.):

$$\min_{(x,y)\in D} (x + y) = \boxed{0}$$

4. Si dica (2p.) se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ è integrabile sull'insieme $A := \{x^2 + y^2 \geq 1\}$: $\boxed{f \text{ è integrabile}}$ / $\boxed{f \text{ non è integrabile}}$.

5. Si scriva l'enunciato (una delle possibili varianti) del teorema di cambio di variabile nell'integrale (4p.).

   Teorema

Siano Ω e W due aperti di $\mathbb{R}^N$ e sia $\phi : \Omega \to W$, ϕ bigettiva e di classe C^1.

Sia $f : W \to [-\infty, +\infty]$ una funzione integrabile su W (*)

Allora:

(a) $(f \circ \phi)|\det J_\phi|$ è integrabile su Ω;

(b) $\displaystyle\int_\Omega f(\phi(y))|\det J_\phi(y)|\, dy = \int_W f(x)\, dx$

(*) cioè la funzione estesa col valore zero fuori Ω è integrabile su $\mathbb{R}^N$

[1] Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

COMMENTI SULLE RISPOSTE (non richiesti, ma utili a capire)

1) La definizione di punto critico per f vincolato a $V=\{G=0\}$, cioè

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla G_k(x_0)$$

ESPRIME IL FATTO CHE $\nabla f(x_0)$ appartiene allo SPAZIO NORMALE a V in x_0 (VEDI LA TEORIA)

2) Il grafico di una funzione C^1 è SEMPRE REGOLARE dato che è definito dalla funzione $G(x,y)=f(x)-y$, che ha come gradiente $\nabla G(x,y)=\begin{pmatrix}\nabla f(x)\\ -1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

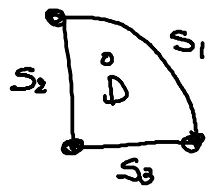
3) Basta osservare che la funzione $f(x,y)=x+y$ è ≥ 0 su D e vale zero in $(0,0)\in D$. Ovviamente si potrebbe usare i moltiplicatori, ma la cosa è lunga e bisognerebbe trovare:

(a) i pti critici di f in $\mathring{D}$: NON CE NE SONO perché $\nabla f=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

(b) i pti critici di f su $S_1=\{x^2+y^2=1, x>0, y>0\}$ cioè

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}x>0\\y>0\end{matrix}$ $\Rightarrow$ $x=y=\frac{\sqrt2}{2}$ $\leftarrow$ SI VEDE CHE È DI MAX

(c) i pti critici su $S_2=\{x^2+y^2<1, x=0, y>0\}$
NON CE NE SONO perché $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ IMPOSSIBILE



d) i pti critici su $S_3=\{x^2+y^2<1, x>0, y=0\}$
NON CE NE SONO (simile a c)

e) i punti in cui due vincoli si annullano e sono $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$
Tra questi c'è $(0,0)$ che è il punto di minimo: infatti
$f(0,0)=0$, $f(0,1)=f(1,0)=1$, $f\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt2},\frac{\sqrt2}{\sqrt2}\right)=\sqrt2$

(4) A CAUSA DI UN ERRORE DI STAMPA LA SOLUZIONE DI QUESTO PUNTO È COMPLICATA E VERRANNO DATI 2 PUNTI A TUTTI
IN EFFETTI BISOGNEREBBE VALUTARE

$$\iint_A |f(x,y)|\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta)|\,\rho\,d\rho}{\rho} =$$

$\boxed{\text{DOVEVA ESSERE } A=\{x^2+y^2\leq 1\}}$

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} |\sin(\rho^2 \sin 2\theta/2)|\,d\rho$. Cambio $\rho^2\frac{|\sin 2\theta|}{2}=s$ nell'integrale interno $\Rightarrow$ $\rho=\left|\frac{2s}{\sin 2\theta}\right|^{1/2}$ $d\rho=\sqrt{\frac{2}{|\sin 2\theta|}}\frac{ds}{2\sqrt s}$ $\Rightarrow$

$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{|2\sin\theta|}}\int_{\frac{|\sin(2\theta)|}{2}}^{+\infty}\frac{|\sin(s)|}{\sqrt s}\,ds$. ORA SI SA DA ANALISI 1 che l'integrale in s è divergente a $+\infty$ $\Rightarrow$

$= \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sim}\,+\infty = +\infty$

Ingegneria Aerospaziale, Compitino del 22 marzo 2019 - PARTE B   Cognome/Nome:

1. Si consideri

$$V = \{(x,y,z) : e^{x-y+z} = xyz + 1, x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

(a) Si mostri (1p.) che esiste un unico punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in V con $y_0 > 0, z_0 = 0$ e lo si calcoli:

$$P_0 = \left(\boxed{1} \;,\; \boxed{1} \;,\; 0 \right)$$

(b) si mostri (4p.) che esiste una curva $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, con $\epsilon > 0$ piccolo tale che: t˙a) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), t)$, (cioè $\gamma_3(t) = t$),

b) $\gamma(0) = P_0$,

c) vicino P_0 l'insieme V coincide con il sostegno della curva γ.

(c) Si calcoli (2p.) il vettore tangente

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$$

.

d) Si dica (1p.) se V è limitato $\boxed{\text{SI}}\,\boxed{\text{NO}}$.

Svolgimento

. Considero $G(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x-y+z} - xyz - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2 \end{bmatrix}$ (dunque $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$).

È chiaro che $V = \{ P \in \mathbb{R}^3 : G(P) = \vec{0} \}$ ($\vec{0} \in \mathbb{R}^2$). Se cerchiamo $P = (x,y,0)$ con $P \in V$ dobbiamo imporre $e^{x-y} - 0 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 2 \iff$ $e^{x-y} = 1$, $x^2 + y^2 = 2 \iff x = y, x^2 + y^2 = 2 \iff x = y, x^2 = 1 \iff x = y = \pm 1$.

Dato che vogliamo $y > 0$ l'unica possibile è 1. $(1, 1, 0)$

. Usiamo il teorema del Dini e calcoliamo la matrice Jacobiana di G

$$J_G(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x-y+z} - yz, & -e^{x-y+z} - xz, & e^{x-y+z} - xy \\ 2x, & 2y, & 2z \end{bmatrix}$$

$$J_G(P_0) = J_G(1,1,0) = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 2, & 2, & 0 \end{bmatrix}$$ Dunque

$\dfrac{\partial G(P_0)}{\partial(xy)} = \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 2 \end{bmatrix}$ che ha det. $4 \neq 0$, mentre $\dfrac{\partial G}{\partial z}(P_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ne segue che vicino a P_0 si possono esplicitare (x,y) in termini di z, cioè esistono due funzioni C^1 $x(z)$ e $y(z)$ definite per z vicino a zero, tali che $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ e vicino a P_0 i punti di V sono tutti e soli del tipo $(x(z), y(z), z)$, $z \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Se allora pongo $\gamma(t) = (X(t), Y(t), t)$ ho proprio una curva definita per $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tale che $\gamma(0) = (1,1,0) = P_0$ e M coincide col sostegno di γ - VICINO a P_0-.

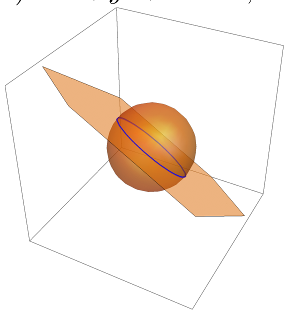
- Sempre per il teorema del Dini

$$\begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(z) \\ Y(z) \end{bmatrix}'_{z=0} = -\frac{\partial G}{\partial(x,y)}(P_0)^{-1} \frac{\partial G}{\partial z}(P_0) = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DUNQUE $\gamma'(0) = \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

È ovvio che V è limitato dato che V è contenuto nella sfera $\{x^2+y^2+z^2 = 2\}$

2. Si consideri l'insieme $V := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, 3x+4y+5z = 0\}$, che rappresenta l'intersezione



della sfera unitaria con un piano. Si dia per buone che V è un vincolo regolare. Si giustifichi il fatto che la coordinata z dei punti di V ha massimo e si calcoli tale massimo (8p.):

$$\max_{(x,y,z)\in V)} z = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Svolgimento

Uso i moltiplicatori con $f(x,y,z) = z$ e

$$g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)) = (x^2+y^2+z^2-1, 3x+4y+5z)$$

Nel punto di minimo deve essere

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \lambda \nabla g_2 \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda 2x + 3\mu \\ 0 = \lambda 2y + 4\mu \\ 1 = \lambda 2z + 5\mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 3x+4y+5z = 0 \end{cases}$$

se moltiplico la I° riga per 3, la II° per 4, la III° per 5 e le sommo $\Rightarrow$

$$5 = 2\lambda(\underbrace{3x+4y+5z}_{=0}) + (9+16+25)\mu$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda 2x + 3/10 \\ 0 = \lambda 2y + 4/10 \\ 1 = \lambda 2z + 5/10 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 3x+4y+5z = 0 \end{cases}$$

Moltiplico la I° per x, la seconda per y, la III per z e sommo $\Rightarrow$

$$z = 2\lambda(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=1}) + (\underbrace{3x+4y+5z}_{=0})\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow z = 2\lambda$$

Metto metto $2\lambda = z$ nella IV° $\Rightarrow 1 = z^2 + 5/10 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. ORA SI PUÒ CONTINUARE E TROVARE x e y. Però dato che mi interessa il VALORE massimo di z è chiaro che $\frac{\sqrt{2}}{2}$ è il massimo (e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ è il minimo)

3. Si calcoli il seguente integrale (9p.):

$$\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz = \boxed{8\sqrt{2}-\frac{8}{45}}$$

dove $A = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 2, x^2+y^2+z^2 \ge 1\}$

Svolgimento

Conviene osservare che $A = Q \setminus B$ (differenza tra Q e B) $B \subset Q$

dove $Q = [0,2]\times[0,2]\times[0,2]$ e $B = \{x^2+y^2+z^2 < 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$

Dunque $\displaystyle\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz = \iiint_Q \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz - \iiint_B \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$.

- $\displaystyle\iiint_Q \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz = \left(\int_0^2 x\,dx\right)\left(\int_0^2 y\,dy\right)\left(\int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{z}}\right) = \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2}_{2} \underbrace{\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2}_{2} \underbrace{\left[2\sqrt{z}\right]_0^2}_{2\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$

- $\displaystyle\iiint_B \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz = (\text{coord. sferiche}) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho\cos\theta\sin\varphi\,\rho\sin\theta\sin\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho}{\sqrt{\rho\cos\theta}}$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}\,d\varphi \int_0^1 \rho^{7/2}\,d\rho$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right) = \frac{1}{2}$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}\sin\varphi\,d\varphi =$ $(s = \cos\varphi \quad ds = -\sin\varphi\,d\varphi)$

$\displaystyle\int_1^0 \frac{1-s^2}{\sqrt{s}}(-ds) = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - s^{3/2}\right) ds = \left[2\sqrt{s} - \frac{2}{5}s^{5/2}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$

- $\displaystyle\int_0^1 \rho^{7/2}\,d\rho = \left[\frac{2}{9}\rho^{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$

$\displaystyle\Rightarrow \iiint_B \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

$\displaystyle\Rightarrow \iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz = 8\sqrt{2} - \frac{8}{45}$