COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 16 febbraio 2019 - PARTE A

1. Si consideri la serie di Fourier data da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+2^n} \sin(2nt)$. Diamo per buono che esiste il limite puntuale della serie, indicato con $f(t)$, per ogni t reale. Allora (1p. a risposta):
   - la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$ a f ~~vero~~/falso
   - f è derivabile ~~vero~~/falso
   - si scriva il periodo di f: $T = \boxed{\pi}$.

2. Si calcoli l'area della superficie S definita come il grafico della funzione $z = 1 - x^2 - y^2$ sull'insieme $B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (3p.)

$$A(S) = \boxed{\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)}$$

3. Si consideri la funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $G(x,y,z) = e^{z^2-xy} + xyz$ e il sottoinsieme $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : G(x,y,z) = 0\}$. Sia $P_0 = (1,1,-1)$. Si mostri che $P_0 \in M$ (0.5p). Si spieghi inoltre come mai, vicino a P_0, M è una superficie regolare (1,5p.) e si scrivano i coefficienti del piano tangente a M nel punto P_0 (1p.): $ax + by + cz = d$ dove: (a, b, c e d non sono unici basta trovarne quattro corretti)

$a = \boxed{2}$ $b = \boxed{2}$ $c = \boxed{1}$ $d = \boxed{3}$

Motivazione (concisa)

$$\nabla G(x,y,z) = \begin{bmatrix} -y e^{z^2-xy} + yz \\ -x e^{z^2-xy} + xz \\ 2z e^{z^2-xy} + xy \end{bmatrix} \qquad \nabla G(1,1,-1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

Dunque per il teorema del Dini il vincolo è una superficie regolare vicino a $(1,1,-1)$. INOLTRE $\nabla G(P)$ è un vettore normale a M in P_0 per cui il piano tangente ha equazione

$\nabla G(P_0) \cdot (P - P_0) = 0 \iff -2(x-1) - 2(y-1) - (z+1) = 0$ che svolgendo i calcoli diventa $2x + 2y + z = 3$

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è una curva continua, allora γ ha lunghezza finita. $\boxed{\text{vero}}$ / ~~falso~~

(b) La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{1+x^4+y^4}$ è (nel senso di Lebesgue):

~~misurabile e interabile su $\mathbb{R}^2$~~, $\boxed{\text{misurabile e non interabile su } \mathbb{R}^2}$, $\boxed{\text{non misurabile}}$,

(c) Il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x,y) := \dfrac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$ è conservativo. ~~vero~~ / $\boxed{\text{falso}}$

(d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) := 4 - x^2 - 4y^2$, nel punto $P := (0,0,1)$ ha:

~~massimo~~, $\boxed{\text{minimo}}$, $\boxed{\text{nessuno dei due}}$

(2) $A(S) = \iint_B \sqrt{1+|\nabla g|^2}\,dx\,dy$ dove $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla g(x,y) = \begin{bmatrix}-2x\\-2y\end{bmatrix}$ e quindi

$$A(S) = \iint_B \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4s}\,\frac{ds}{2} =$$

$$\pi\left[\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}(1+4s)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{5}\,5 - 1\right)$$

(1) Se ho una serie $\sum a_n \cos(n\omega t)$ allora il periodo T verifica $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

Nel nostro caso $\omega = 2 \Rightarrow T = \pi$. Per la conv. unif serve $\sum |a_n| < +\infty$ e in questo caso è vero dato che $\sum^{\infty} \frac{n^2}{1+2^n}$ converge. Dato che anche $\sum_0^{\infty} n|a_n| = \sum_0^{\infty} \frac{n^3}{1+2^n}$ è convergente $\Rightarrow$ la serie delle derivate converge unif. alla derivata di f (e f è derivabile)

(4) (a) È noto che è falso (vedi lezioni / dispense)

(b) È misurabile in quanto continua. È integrabile perché

$$\left|\frac{\sin(xy)}{1+x^4+y^4}\right| \le \frac{1}{1+x^4+y^4} \le \frac{1}{1+\|(x,y)\|^4/2}$$

INTEGRABILE SU $\mathbb{R}^2$ (VISTO A LEZIONE)

(INFATTI $x^2y^2 \le \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \le x^4 + x^4 + y^4 + y^4 \le 2(x^4+y^4)$)

(c) È un campo centrale (TIPO $\phi(\|x\|)\vec{x}$) $\Rightarrow$ è conservativo

(d) È chiaro che $-x^2 - 4y^2 \le 0 \Rightarrow$ il punto è di minimo assoluto

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := e^{4(xy-1)} - 2x^2 - 2y^2$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (2p.).

   $(x, y) =$ $(0,0)$ punto di MASSIMO $(x, y) =$ ______ punto di ______

   $(x, y) =$ $(1,1)$ punto di SELLA $(x, y) =$ $(-1,-1)$ punto di SELLA

   (b) Si trovino (1p.):

   $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \boxed{+\infty}$, $\inf_{\mathbb{R}^2} f = \boxed{-\infty}$.

   (c) Se $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$ si trovino (3p.):

   $\max_B f = \boxed{e^4 - 8}$, $\min_B f = \boxed{e^{-4} - 8}$.

Svolgimento

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4y\, e^{4xy-4} - 4x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x\, e^{4xy-4} - 4y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 16y^2 e^{4xy-4} - 4 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (16xy + 4)e^{4xy-4} \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16x^2 e^{4xy-4} - 4$

PTI CRITICI $\begin{cases} x = y\, e^{4xy-4} \\ y = x\, e^{4xy-4} \end{cases} \Rightarrow x = x\left(e^{4xy-4}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{4xy-4} = 1 \end{cases}$ ($=-1$ IMPOSS.)

SE $x=0$ TROVO $y=0$ se no $\begin{cases} e^{4xy-4} = 1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{4x^2-4} = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \pm(1,1)$

CALCOLO GLI HESSIANI

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 4e^{-4} \\ 4e^{-4} & -4 \end{bmatrix} \to \det = 16 - 16e^{-2} > 0 \quad a_{11} = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ pto di MASSIMO

$H_f(\pm(1,1)) = \begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} \to \det < 0$, pti di sella

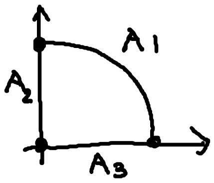
(b) Vedo che $\lim_{x \to +\infty\,(-\infty)} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty\,(-\infty)} e^{-4} - 2x^2 = -\infty \Rightarrow \inf f = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty\,(-\infty)} f(x,x) = \lim_{x \to +\infty\,(-\infty)} e^{4x^2-4} - 4x^2 = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty$

(VINCE L'ESPONENZIALE!)

(c) Devo trovare i max/min sulla frontiera di B, oltre a considerare i punti critici interni a B. Noto che

$\partial B = \underbrace{\{x^2+y^2 = 4, x \ge 0, y \ge 0\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{x = 0\ 0 \le y \le 2\}}_{A_2} \cup \underbrace{\{y = 0, 0 \le x \le 2\}}_{A_2}$



Uso i moltiplicatori. Ricordiamo che i punti $(0,0)$ $(0,2)$ e $(2,0)$ (in cui due condizioni di vincolo coesistono) vanno trattati a parte. DUNQUE

SU A1
$$\begin{cases} 4y\, e^{4xy-4} - 4x = \lambda x \\ 4x\, e^{4xy-4} - 4y = \lambda y \\ x^2+y^2 = 4 \quad x>0,\ y>0 \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA I^a per y, la II^a per x e sottraggo $\Rightarrow$
$$(4y^2 - 4x^2)\, e^{4xy-4} = 0 \Rightarrow x = \pm y$$

Se impongo che valga la III^a $\Rightarrow$ $(x,y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

SU A2
$$\begin{cases} 4y\, e^{4xy-4} - 4x = 0 \\ 4x\, e^{4xy-4} - 4y = \lambda \\ x^2+y^2 < 4 \quad x=0 \ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\, e^{-4} = 0 \\ \lambda = \ldots\ldots \\ x=0 \quad 0<y<2 \end{cases}$$
IMPOSSIBILE

SU A3 stesso ragionamento di A2, non trovo niente.

DUNQUE DEVO CONFRONTARE I VALORI DI f nei punti

$(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(1,1)$

questo lo posso escludere perché è di sella.

Trovo
$$f(0,0) = e^{-4}$$
$$f(0,2) = e^{-4} - 8 = f(2,0) \qquad f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = e^4 - 8$$

è chiaro che $f(0,0) > f(0,2) = f(2,0)$. INVECE $e^4 - 8 > e^{-4}$

infatti $e^4 - 8 > 2^4 - 8 = 16 - 8 = 8$, mentre $e^{-4} < 1$

DUNQUE il minimo è $e^{-4} - 8$ (in $(0,2)$ e $(2,0)$)
e il massimo è $e^4 - 8$ (in $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$)

2. Si considerino il dominio D e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$D := \left\{ (x, y, x) \, : x \geq 0, x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}, \quad \vec{f}(x,y,z) := e^{2x}\left(-(3y^2+6z^2)\vec{\mathbf{i}} + 2y^3\vec{\mathbf{j}} + 4z^3\vec{\mathbf{k}}\right)$$

(a) Si mostri che la frontiera ∂D è composta di due superfici parametriche S_1 e S_2 aventi in comune un bordo Σ e tali che l'origine si trovi in S_1. Si trovino S_1, S_2 e Σ:

$S_1 = \boxed{\left\{ x=0, \ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}}$ (0,5p.)

$S_2 = \boxed{\left\{ x \geq 0, \ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}}$ (0,5p.)

$\Sigma = \boxed{\left\{ x=0, \ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}}$ (0,5p.)

(b) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso S_1 ed S_2 considerando le normali ν_1 e ν_2 uscenti da D (3p.)

$\Phi(\vec{f}, S_1) = \boxed{99\pi}$ $\quad \Phi(\vec{f}, S_2) = \boxed{-99\pi}$

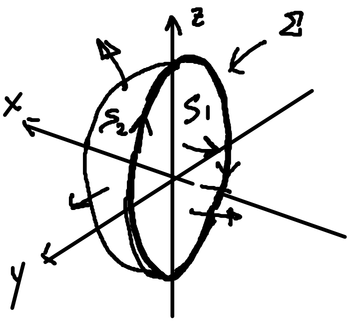
(c) Si trovi una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ che descrive Σ coerentemente con la normale ν_2 (0,5p.):

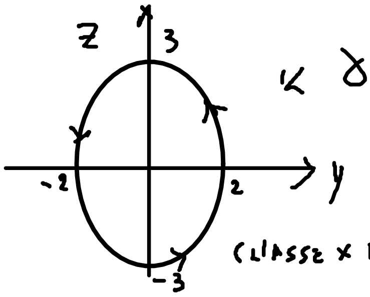
$\gamma(t) = \boxed{2\cos(t)\vec{j} + 3\sin(t)\vec{k}}$ per $t \in \boxed{[0, 2\pi]}$

(d) Si dica se esiste $\vec{F}$ potenziale vettore per $\vec{f}$ e in caso affermativo si calcoli l'integrale su γ di $\vec{F}$:

$\boxed{\vec{F} \text{ non esiste}}$ oppure $\oint_\gamma \vec{F} \cdot ds = \boxed{99\pi}$ (1p.)

Svolgimento





$\gamma(t) = 2\cos(t)\vec{j} + 3\sin(t)\vec{k}$

(L'ASSE X PUNTA VERSO "IL DAVANTI")

Notiamo che la $\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{2x}(3y^2+6z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial y} 2e^{2x}y^3 + \frac{\partial}{\partial z} 4e^{2x}z^3$

$= -2e^{2x}(3y^2+6z^2) + 6e^{2x}y^2 + 12e^{2x}z^2 = 0$

DUNQUE $\Phi(\vec{f}, \partial D) = 0$ da cui $\Phi(\vec{f}, S_1) + \Phi(\vec{f}, S_2) = 0$

calcoliamo $\Phi(f, S_1)$ notando che la normale su S_1 è $-\vec{i}$

e dunque $\Phi(f, S_1) = \iint_{\{\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leq 1\}} -f_1(0, y, z)\,dy\,dz =$

$\iint_{\{\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leq 1\}} (3y^2+6z^2)\,dy\,dz.$ Usiamo il cambio di coordinate $y = 2\rho\cos\theta$, $z = 3\rho\sin\theta$ che dà $dx\,dy = 6\rho\,d\rho\,d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(3\cdot 4\rho^2\cos^2\theta + 6\cdot 9\rho^2\sin^2\theta\right)6\,d\rho\,d\theta = 36\int_0^{2\pi}(2\cos^2\theta + 9\sin^2\theta)\,d\theta\int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= 36\int_0^{2\pi}\left(2\,\frac{1+\cos(2\theta)}{2} + 9\,\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{36}{4}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{9}{2}\right)+\left(1-\frac{9}{2}\right)\cos(2\theta)\,d\theta =$$

$$9\left(1+\frac{9}{2}\right)2\pi = 99\pi.$$

Per quanto trovato sopra $\Phi(\vec{f}, S_2) = -\Phi(\vec{f}, S_1)$

Inoltre dato che $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ il campo è solenoidale e ha potenziale vettore $\vec{F}$ (è definito su tutto $\mathbb{R}^3$).

Per il Teorema di Stokes

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot ds = \iint_{S_2} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\nu\,d\sigma = \Phi(\vec{f}, S_2) = 99\pi$$

3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$(4-x^2)y'' + xy' + 8y = 0$$

e se ne cerchino le soluzioni y esprimibili come serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Si cerchi una relazione ricorsiva che permette di calcolare gli a_n (2p.):

($\mathcal{R}$) $\boxed{a_{n+2} = \dfrac{n-4}{4(n+1)} a_n}$

(b) Si deduca che esiste una unica soluzione y tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Si trovi per tale soluzione il raggio di convergenza R della serie che definisce y (1p.) e si calcoli (1p.) $y'''(0)$.

$R = \boxed{2}$, $y'''(0) = \boxed{-\dfrac{9}{4}}$

(c) Si mostri che esiste un'unica soluzione $\tilde{y}$ che verifichi le condizioni $\tilde{y}(0) = 1$, $\tilde{y}'(0) = 0$, si dica qual è il suo raggio di convergenza $\tilde{R}$ (1p.) e la si calcoli esplicitamente (1p.):

$\tilde{R} = \boxed{+\infty}$, $\tilde{y}(x) = \boxed{1 - x^2 + \dfrac{x^4}{6}}$

Svolgimento

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n$

Mettendo y nell'equazione

$(4-x^2)y'' + xy' + 8y = \sum_0^\infty \left[4(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left(-n(n-1) + n + 8\right)a_n\right] x^n =$

$\sum_0^\infty \left[4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2-2n-8)a_n\right] X^n = (*)$

Fattorizzo n^2-2n-8. Le radici sono $1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = <^{4}_{-2}$. Dunque

$n^2-2n-8 = (n-4)(n+2)$ e $(*) = \sum_0^\infty (n+2)\left[4(n+1)a_{n+2} - (n-4)a_n\right] X^n$

IMPONENDO CHE VALGA L'EQUAZIONE: $4(n+1)a_{n+2} = (n-4)a_n \quad \forall n \geq 0$

e posso dividere per $4(n+1) \neq 0$ ottenendo $a_{n+2} = \dfrac{n-4}{4(n+1)} a_n$.

NOTIAMO CHE RISULTANO LIBERI $a_0 = y(0)$ e $a_1 = y'(0)$. Inoltre $y(0)$ determina tutti e soli gli a_n con n pari e $y'(0)$ quelli dispari.

(b) Se posto do $y(0)=0 \Rightarrow a_n = 0 \; \forall n$ pari e $y'(0)=1$ ho $a_n \neq 0 \; \forall n$ dispari dato che $\dfrac{n-4}{4(n+1)} \neq 0$ se n è dispari.

Allora $\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ se n è pari $\sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$ se n è dispari. Per Cesaro

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}\right| \underset{(\text{per } (R))}{=} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{2k+1-4}{4(2k-1+2)}\right| = \frac{1}{4} \lim_{k\to\infty} \frac{2k-3}{2k+1} = \frac{1}{4}$$

Dunque $R = 4$. Per (R) $a_3 = \frac{1}{4}\frac{1-4}{1+1} a_1 = -\frac{3}{8} a_1$

e $a_3 = \frac{g'''(0)}{6} \iff g'''(0) = 6\, a_3 = 6\left(\frac{-3}{8}\right) = -\frac{9}{4}$

(c) Dato che $y'(0)=0 \Rightarrow a_n = 0\ \forall n$ dispari. Se $b_n = a_{2n}$ si ha

$b_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{2n-4}{4(2n+1)} a_{2n} = \frac{2n-4}{2n+1}\frac{b_n}{4}$. Se considero la serie

$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ ho che il suo raggio di convergenza è 4 dato che

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-4}{2n+1}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (a meno che $b_0 = 0 \Rightarrow b_n = 0\ \forall n$).

Allora $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x^2)^n$ converge se $x^2 < 4 \iff |x| < 2$

verifica $\quad y(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6}$ verifico $y(0) = 1$ inoltre

$y'(x) = -2x + \frac{2}{3}x^3 \qquad y''(x) = -2 + 2x^2$. Allora

$(4-x^2)\,y'' + x y' + 8y = (4-x^2)(2x^2-2) + \left(\frac{2}{3}x^4 - 2x^2\right) + 8\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{6}\right) =$

$8x^2 - 8 - 2x^4 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 2x^2 + 8 - 8x^2 + \frac{4}{3}x^4 = 0$

4. $\left(\boxed{} \right.$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16 $\left. \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= x - 2y + 3z \\ y' &= x - 2y + 2z \\ z' &= -x + y - 2z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema e λ_i i suoi autovalori. Indichiamo con $m_A(\lambda_i)$ e $m_G(\lambda_i)$ le molteplicità algebrica e geometrica di ogni λ_i.

(a) si mostri che A ha un solo autovalore λ_1 e lo si scriva con le rispettive molteplicità (1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{-1}, m_A(\lambda_1) = \boxed{3}, m_G(\lambda_1) = \boxed{1};$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per A (3p.) e la relativa forma di Jordan(1p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{(2 + 4t - t^2)\, e^{-t}}$$

$$y(t) = \boxed{(2t - t^2)\, e^{-t}}$$

$$z(t) = \boxed{-2t\, e^{-t}}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)^2 + 4 + 3 - (1-\lambda)\cdot 2 - (-2-\lambda)(-3) - (-2-\lambda)(-2) =$$

$$= (1-\lambda)(4 + 4\lambda + \lambda^2) + 7 - 2 + 2\lambda - 6 - 3\lambda - 4 - 2\lambda =$$

$$4 + \cancel{4\lambda} + \lambda^2 - \cancel{4\lambda} - 4\lambda^2 - \lambda^3 - 5 - 4\lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$$

Dunque $\lambda_1 = -1$ e $m_A(\lambda_1) = 3$. Poniamo

$$B = A + I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ si vede che ha rango 2 (Ker ha dim. 1)

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ha rango 2 ($\Rightarrow B^3 = 0$). Cerco e_3 tale che $B^2 e_3 \neq 0$. Posso prendere $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Allora

$e_2 = B e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $e_1 = B e_2 = B^2 e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formano una base di autovettori generalizzati

Inoltre $J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Posto $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ si ha che

$$A = M J M^{-1} \quad \text{ed} \quad e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1}.$$

Per risolvere il punto c) poniamo $Y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e notiamo che $Y_0 = 2 e_3$. Dato che $M \hat{e}_3 = e_3$ $\left(\hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ si ha $M^{-1} e_3 = \hat{e}_3$

Dunque la soluzione $Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$ è data da

$$Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = 2 M e^{tJ} \hat{e}_3 = M(2e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 2e^{-t} M \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \\ 2 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -t^2 + 4t + 2 \\ -t^2 + 2t \\ -2t \end{bmatrix}$$

Verifico: $x(t) = e^{-t}(2 + 4t - t^2)$ $\quad x'(t) = e^{-t}(-2 - 4t + t^2 + 4 - 2t) = e^{-t}(2 - 6t + t^2)$

$y(t) = e^{-t}(2t - t^2)$ $\quad y'(t) = e^{-t}(-2t + t^2 + 2 - 2t) = e^{-t}(2 - 4t + t^2)$

$z(t) = -2t e^{-t}$ $\quad y'(t) = e^{-t}(-2 + 2t)$

Allora $x(t) - 2y(t) + 3z(t) = e^{-t}(2 + \cancel{4t} - t^2 - \cancel{4t} + 2t^2 - 6t) = e^{-t}(2 - 6t + t^2) = x'(t)$

$x(t) - 2y(t) + 2z(t) = e^{-t}(2 + \cancel{4t} - t^2 - \cancel{4t} + 2t^2 - 4t) = e^{-t}(2 - 4t + t^2) = y'(t)$

$-x(t) + y(t) - 2z(t) = e^{-t}(\cancel{t^2} - \cancel{4t} - 2 - \cancel{t^2} + 2t + \cancel{4t}) = e^{-t}(-2 + 2t) = z'(t)$

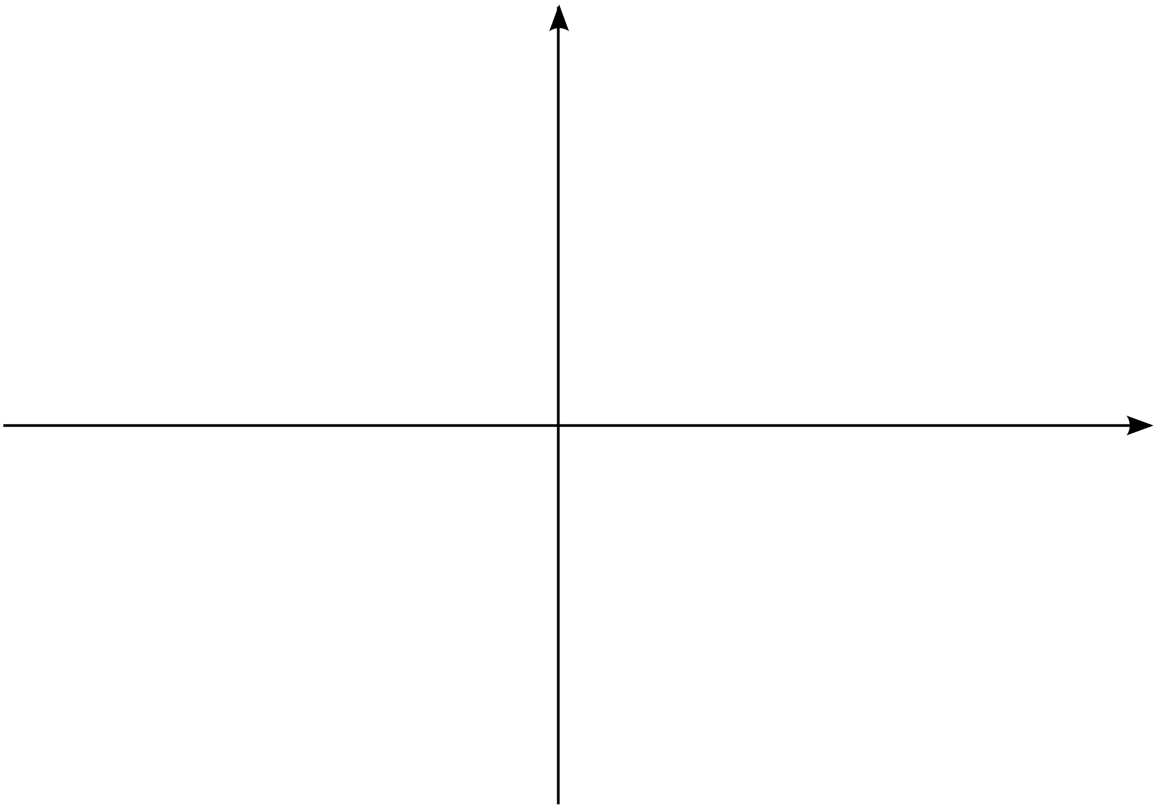
Inoltre è chiaro che $Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Y_0$.

Variante esercizio 4 della seconda parte: solo gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(4y - 12x^2)}{y(5y - 8x^2)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovino un fattore integrante λ della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ (2p.) e un integrale primo Φ (2p.) per l'equazione.

$\lambda(x, y) =$ $\boxed{}$

$\Phi(x, y) =$ $\boxed{}$

3. Si trovi esplicitamente la soluzione $y(x)$ tale che $y(1) = 2$ (1p.)

$y(t) =$ $\boxed{}$.

Svolgimento