COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 2 febbraio 2019 - PARTE A

1. Data la serie di potenze $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 3^n}$, se ne calcoli (1p.) il raggio di convergenza R e nel caso in cui $R > 0$ si trovi (1p.) la derivata terza di f in 0.

$R = \boxed{3}$ $f'''(0) = \boxed{\frac{1}{9}}$

2. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (3t^2, 2t^3)$ (2,5p.)

$l(\gamma) = \boxed{4(2\sqrt{2}-1)}$

3. Si consideri la funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $G(x, y, z) = \begin{pmatrix} z\sin(xy+1) \\ e^{x^2-y^2} - z \end{pmatrix}$ e il sottoinsieme $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : G(x, y, z) = \mathbf{0}\}$ (dove $\mathbf{0}$ è l'origine in $\mathbb{R}^2$). Sia $P = (1, -1, 1)$. Si mostri che $P \in M$ (0.5p), che esistono due funzioni derivabili $y(x)$ e $z(x)$ definite per x vicino a 1 tali che $y(1) = -1$, $z(1) = 1$ e che vicino a P l'insieme M è fatto dai punti $(x, y(x), z(x))$, per x vicino a 1 (2p). Si trovi infine (1p.):

$y'(1) = \boxed{1}$, $z'(1) = \boxed{4}$

Motivazione (concisa)

- $P \in M$ perché $G(P) = G(1,-1,1) = \begin{pmatrix} 1 \sin(1\cdot(-1)+1) \\ e^{1^2-(-1)^2} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Calcolo lo Jacobiano di G nel punto P:

$$J_G(x,y,z) = \begin{bmatrix} zy\cos(xy+1) & zx\cos(xy+1) & \sin(xy+1) \\ 2x\, e^{x^2-y^2} & -2y\, e^{x^2-y^2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_G(P) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$ Noto che $\frac{\partial G}{\partial(yz)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ che ha determinante $\neq 0$

Dunque per Dini esistono $y(x)$ e $z(x)$. Se chiamo $g(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ so che

$$\frac{d}{dx} g(1) = -\frac{\partial G}{\partial(yz)}(P)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(P) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -(-1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(1) \\ z'(1) \end{bmatrix}$$

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Sia $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Allora Ω è:
[connesso e semplicemente connesso], [non connesso e semplicemente connesso],
[connesso e non semplicemente connesso], [né connesso né semplicemente connesso]

(b) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ è (nel senso di Lebesgue):
[misurabile e interabile], [misurabile e non interabile], [non misurabile],

(c) Posto $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 - y^2\}$, allora:
[M non è una superficie parametrica], [M è una sup. param. e il suo bordo è vuoto]
[M è una superficie parametrica e il suo bordo è una curva chiusa]
[M è una superficie parametrica e il suo bordo è $\{(x,y,z) : z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 < 1\}$]

(d) La forma quadratica $\Phi(x,y,z) := x^2 + xy + y^2 - z^2$ è
[semidefinita positiva], [semidefinita negativa] [indefinita]

---

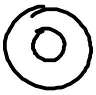
(1) $R = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}+1} = 3$

$\frac{f'''(0)}{3!} = a_3 = \frac{1}{3^3+3^3} = \frac{1}{54} \iff f'''(0) = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$

(2) $\gamma'(t) = (6t, 6t^2) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{36t^2+36t^4} = 6|t|\sqrt{1+t^2}$ DUNQUE

$\ell(\gamma) = \int_{-1}^{1} 6|t|\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\cdot 6\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt \underset{(s=t^2)}{=} 6\int_0^1 \sqrt{1+s}\,ds = 6\cdot\frac{2}{3}(1+s)^{3/2}\Big|_0^1 =$

$4\left(2^{3/2}-1\right) = 4(2\sqrt{2}-1)$

(4) (a) M : 

(b) f è misurabile in quanto continua. Non è integrabile perché $|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2}$
e $|f(x)| \simeq \frac{1}{x}$ all'infinito che non è sommabile (per Riemann $\Rightarrow$ per Lebesgue)

(c) Il bordo di M è $\{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1, z = x^2-y^2\}$ che si descrive come una curva chiusa

(d) Φ è indefinita perché $\Phi(0,0,z) = -z^2 < 0$ $(z \neq 0)$, mentre $\Phi(x,y,0) = x^2+xy+y^2$ che è definita >0 (lo vedo con Sylvester)

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 2 febbraio 2019 - PARTE B   Cognome/Nome:

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := 2x^2 + 6x^4 - 6x^2y^2 + y^4$.

   (a) Si vede che $(0, 0)$ è stazionario per f. Si trovino tutti i punti stazionari di f DIVERSI DA $(0, 0)$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

   $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ punto di SELLA $\quad (x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$ punto di SELLA

   $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ punto di SELLA $\quad (x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1\right)$ punto di SELLA

   (b) Se $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ si trovino (3p.):

   $$\max_B f = \boxed{8}, \qquad \min_B f = \boxed{0}.$$

   (c) Si sfrutti il punto precedente per dire se $(0, 0)$ è localmente (1p.):

   punto di massimo, punto di minimo, nessuno dei due.

Svolgimento

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 24x^3 - 12xy^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + 72x^2 - 12y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -24xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2$$

PTI STAZ.:

$$\begin{cases} 4x + 24x^3 - 12xy^2 = 0 \\ -12x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

LA I^a è vera se $x=0 \Rightarrow y = 0$

LA II^a è vera se $y = 0 \Rightarrow 4x + 24x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $4 + 24x^2 = 0$ IMPOSSIBILE

SE SCARTO LA SOL. $(0,0)$ IL SISTEMA DIVENTA

$$\begin{cases} 1 + 6x^2 - 3y^2 = 0 \\ -3x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3x^2 \\ 1 + 6x^2 - 9x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3x^2 \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Se calcolo l'Hessiano in uno di questi (QUATTRO) punti:

$$H_f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm 1\right) = \begin{bmatrix} 4 + \frac{72}{3} - 12 & \pm\frac{24\sqrt{3}}{3} \\ \pm\frac{24\sqrt{3}}{3} & -\frac{12}{3} + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & \pm 8\sqrt{3} \\ \pm 8\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}$$

± a seconda che i segni siano concordi o discordi

il determinante è $16 \cdot 8 - 8 \cdot 8 \cdot 3 = 8^2(2-3) < 0$ TUTTE SELLE!!

(b) Usiamo i moltiplicatori per trovare i pti critici su $\partial B = \{x^2 + y^2 = 1\}$

$$\begin{cases} 4x + 24x^3 - 12xy^2 = 2\lambda x \\ -12x^2y + 4y^3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

La I^a rige è ok se $x = 0$. In tal caso $y = \pm 1$ dalla III^a e la II^a è ok per λ opportuno. Analogamente si trova la sol. $y = 0$ $x = \pm 1$

oltre a queste soluzioni ho il sistema

$$\begin{cases} 4+24x^2-12y^2=2\lambda \\ -12x^2+4y^2=2\lambda \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda=4+24x^2-12y^2 \\ 4+24x^2-12y^2=-12x^2+4y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2\lambda=4+24x^2-12y^2 \\ 1=-9x^2+4y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda=4+24x^2-12y^2 \\ x^2+y^2=1 \\ 10x^2=3y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=\dots \\ x^2=\frac{3}{13} \\ y^2=\frac{10}{13} \end{cases}$$

VEDIAMO I VALORI DI f sui punti trovati:

$f(\pm1,0)=8$, $f(0,\pm1)=1$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{13}},\pm\sqrt{\frac{10}{13}}\right)=$

$$=2\frac{3}{13}+6\left(\frac{3}{13}\right)^2-6\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{13}+\left(\frac{10}{13}\right)^2=\frac{6\cdot13+6\cdot9-6\cdot30+100}{13^2}=\frac{52}{13^2}<1$$

OLTRE AI PUNTI CRITICI VINCOLATI A ∂B BISOGNA GUARDARE i PUNTI CRITICI in $\mathring{B}=\{x^2+y^2<1\}$. Si vede che solo $(0,0)\in\mathring{B}$ tra i punti critici liberi e inoltre $f(0,0)=0$

Da tutto questo si vede che il minimo è 0, assunto in $(0,0)$ e il massimo è 8, assunto in $(\pm1,0)$

c) Dato che $(0,0)$ è pto di minimo in $B(0,1)$ $\Rightarrow$ è pto di minimo locale

2. Si considerino gli insiemi D, D_1, L, C e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$D := \left\{(x,y,x) : 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2, x^2+y^2 \le 1\right\}, \quad D_1 := \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1, x^2+y^2 \le 1\}$$
$$L := \left\{(x,y,x) : 0 \le z \le 1, x^2+y^2 = 1\right\}, \quad C := \left\{(x,y,z) : z = 2 - x^2 - y^2, x^2+y^2 \le 1\right\},$$
$$\vec{f}(x,y,z) := x^3(z+y^2)\mathbf{\vec{i}} + y^3(z-x^2)\mathbf{\vec{j}} - z^2(x^2+y^2)\mathbf{\vec{k}}.$$

Su L e C si considerino le normali uscenti da D. Si calcolino:

(a) il flusso $\Phi(\partial D)$ di $\vec{f}$ uscente da D attraverso ∂D (2p.)

$$\Phi(\partial D) = \boxed{\frac{11}{24}\pi}$$

(b) il flusso $\Phi(L)$ di $\vec{f}$ attraverso L (3p.); **suggerimento**: si utilizzi il teorema della divergenza per D_1

$$\Phi(L) = \boxed{\frac{3}{4}\pi}$$

(c) il flusso $\Phi(C)$ di $\vec{f}$ attraverso C (2p.)

$$\Phi(C) = \boxed{\frac{-7\pi}{24}}$$

Svolgimento

(a) Si vede facilmente che $\operatorname{div}\vec{f} = z(x^2+y^2)$. Allora

$\phi(\vec{f},\partial D) = \iiint_D z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{B(0,1)} (x^2+y^2)\int_0^{2-x^2-y^2} z\,dz\,dx\,dy =$

(dove $B(0,1) = \{x^2+y^2 \le 1\}$) $= \iint_{B(0,1)} (x^2+y^2)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{2-x^2-y^2} dx\,dy = \iint_{B(0,1)} (x^2+y^2)\frac{(2-x^2-y^2)^2}{2}\,dx\,dy =$

(coord. polari) $= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2(2-\rho^2)^2\rho\,d\rho \underset{(\rho^2=s)}{=} \pi\int_0^1 s(2-s)^2\frac{ds}{2} = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (4s-4s^2+s^3)\,ds$

$= \frac{\pi}{2}\left[4\frac{s^2}{2} - 4\frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{24-16+3}{12} = \frac{11}{24}\pi$

(b) Notiamo che $\partial D_1 = L \cup B_0 \cup B_1$ dove $B_0 = \{x^2+y^2 \le 1, z=0\}$, $B_1 = \{x^2+y^2 \le 1, z=1\}$

Calcolo $\phi(\vec{f},\partial D_1) = \iiint_{D_1} (x^2+y^2)\int_0^1 z\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho^2\cdot\rho\,d\rho\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 =$

$2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

Inoltre $\phi(\vec{f}, B_0) = \iint_{B(0,1)} -f_3(x,y,0)\,dx\,dy = 0$ (la normale a B_0 è $-\vec{k}$)

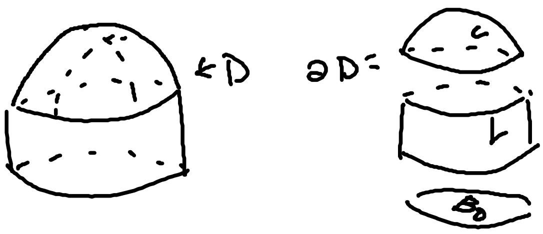
$\phi(\vec{f}, B_1) = \iint_{B(0,1)} f_3(x,y,1)\,dx\,dy$ (la normale a B_1 è $\vec{k}$) $=$

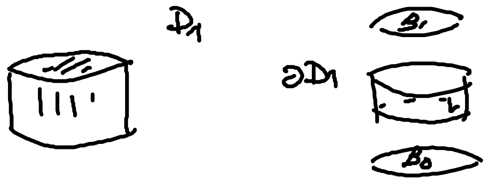
$= \iint_{B(0,1)} -(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 -\rho^2\rho\,d\rho = 2\pi\left[-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$

DUNQUE $\phi(\vec{f},L) = \phi(\vec{f},\partial D_1) - \phi(\vec{f},B_0) - \phi(\vec{f},B_1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$

(c) Dato che $\partial D = C \cup L \cup B_0 \Rightarrow \Phi(\vec{\rho}, C) = \Phi(\rho, \partial D) - \Phi(\vec{\rho}, L) - \Phi(\vec{\rho}, B_0)$

$$= \frac{11}{24}\pi - \frac{3}{4}\pi - 0 = \frac{11-18}{24}\pi = -\frac{7}{24}\pi$$





3. Si consideri la seguente equazione differenziale lineare:

$$(1-x^2)y'' + 2xy' + 4y = 0$$

e se ne cerchino le soluzioni y esprimibili come serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Si cerchi una relazione ricorsiva che permette di calcolare gli a_n (2p.):

$$(\mathcal{R}) \quad \boxed{a_{n+2} = \frac{n-4}{n+2} a_n}$$

(b) Si deduca che esiste una unica soluzione y tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Si trovi per tale soluzione il raggio di convergenza R della serie che definisce y (1p.) e si calcoli (1p.) $y'''(0)$.

$$R = \boxed{1}, \quad y'''(0) = \boxed{-6}$$

(c) Si mostri che esiste un'unica soluzione $\tilde{y}$ che verifichi le condizioni $\tilde{y}(0) = 1$, $\tilde{y}'(0) = 0$, si dica qual è il suo raggio di convergenza $\tilde{R}$ (1p.) e la si calcoli esplicitamente (2p.):

$$\tilde{R} = \boxed{\infty}, \quad \tilde{y}(x) = \boxed{1 - 2x^2 + x^4}$$

Svolgimento

(a) Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ e

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

Inserendo nell'equazione:

$$(1-x^2)y''(x) + 2x y'(x) + 4y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

$$+ 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n - n(n-1)x^n$$

$$+ 2n a_n x^n + 4 a_n x^n \} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) - (n^2-3n-4)a_n \right] x^n = (*)$$

Noto che le radici di x^2-3x-4 sono $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$

dunque $n^2-3n-4 = (n+1)(n-4)$ e posso scrivere:

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left[(n+2)a_{n+2} - (n-4)a_n\right] x^n$$

. Dato che $(*) = 0$

ne ricavo $(n+1)\left[(n+2)a_{n+2} - (n-4)a_n\right] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e tenendo conto del fatto che $m+1$ e $m+2$ non si possono mai annullare ricavo $a_{m+2} = \frac{m-4}{m+1} a_m$.

(b) La (R) individua univocamente gli (a_n) una volta assegnati a_0 e a_1. Inoltre $a_0 = y(0)$ $a_1 = y'(0)$ (per le proprietà delle serie di potenze si ha $a_k = \frac{y^{(k)}}{k!}(0)$). Allora

Notiamo che da $a_0 = 0$ e da R si ha che $a_n = 0$ per tutti gli n pari, mentre da $a_1 = 1$ possiamo ricavare a_n per gli n dispari.

Inoltre se $n = 2k+1$ (dispari) $a_{2k+1} \neq 0$ dato che in R il fattore $\frac{m-4}{m+2}$ è sempre $\neq$ per n dispari. Allora

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{2k-1-4}{2k-1+2} = \frac{2k-5}{2k+1} \longrightarrow 1 \text{ se } k \to \infty \Rightarrow \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} \to 1$$

Se invece $m = 2k$ $a_{2k} = 0 \Rightarrow \sqrt[2k]{a_{2k}} \to 0$. Ne segue

$$\max \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 1 \Rightarrow R = 1.$$

Dalla R segue infine $a_3 = a_{1+2} = \frac{1-4}{1+2} a_1 = -a_1 = -1$

da cui $y'''(0) = 3!\, a_1 = -6$

(c) Se metto $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ottengo che $a_m = 0$ per tutti gli n dispari

Usando R con $n = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{0-4}{0+2} a_0 = -2a_1 = -2$

con $n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{2-4}{2+2} a_2 = \frac{-2}{4}(-2) = 1$

con $m = 4 \Rightarrow a_6 = \frac{4-4}{2+2} a_4 = 0$

e allora $a_m = 0$ per tutti gli m pari ≥ 6. Ne segue

$\tilde{y}(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 = 1 - 2x^2 + x^4$ che ha

evidentemente raggio ∞ ($a_m = 0$ se $m \geq 5 \Rightarrow \sqrt[m]{|a_n|} \to 0 \Rightarrow \tilde{R} = \infty$)

Verifico: se $\tilde{y}(x) = 1-2x^2+x^4 \Rightarrow \tilde{y}' = -4x + 4x^3$, $\tilde{y}'' = -4 + 12x^4$. Allora

$(1-x^2)y'' + 2xy' + 4y = (1-x^2)(8x^2-4) + 2x(4x^3-4x) + 4(1-2x^2+x^4) =$

$12x^2 - 4 - 12x^4 + 4x^2 + 8x^4 - 8x^2 + 4 - 8x^2 + 4x^4 = 0$

4. ($\square$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= 4x - 6y \\ y' &= 3x - 5y \\ z' &= -3x + 3y - 2z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema e λ_i i suoi autovalori. Indichiamo con $m_A(\lambda_i)$ e $m_G(\lambda_i)$ le molteplicità algebrica e geometrica di ogni λ_i.

(a) si mostri che A ha due autovalori e li si scriva con le rispettive molteplicità (1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{1}, m_A(\lambda_1) = \boxed{1}, m_G(\lambda_1) = \boxed{1};$$

$$\lambda_2 = \boxed{-2}, m_A(\lambda_2) = \boxed{2}, m_G(\lambda_2) = \boxed{2}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per A (3p.) e la relativa forma di Jordan(1p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{1} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 4$, $y(0) = 2$ e $z(0) = -2$. (1p.)

$$x(t) = \boxed{4e^t}$$

$$y(t) = \boxed{2e^t}$$

$$z(t) = \boxed{-2e^t}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Pol. caratteristico $P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & 3 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$

$$-(2+\lambda)\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 3 & -5-\lambda \end{bmatrix} = -(2+\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = -(\lambda+2)(\lambda-1)$$

DUNQUE $\lambda_1 = 1$ $m_A = m_G = 1$, $\lambda_2 = -2$ $m_A = 2$ (per m_G vediamo...)

$\underline{\lambda = 1}$ Prendo $B = A - I$ e cerco $e_1 \in \operatorname{Ker} B$:

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -y \end{cases}$$

PER ESEMPIO $e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -2$ Prendo $B = A + 2I$:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ vedo che ho rango 1 $\Rightarrow$ $\dim(\ker B) = 2$ e allora ci sono due autovettori lin. indip.

Se $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ imponendo $Be = 0$ trovo $x = y$. Dunque posso prendere per es.

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che $m_G(-2) = 2$ e la forma di Jordan è (diagonale) $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

SE PONGO $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} = M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} M^{-1}$

Per risolvere l'equazione con le condizioni indicate noto che $Y_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ coincide con $2e_1$. Dato che $M\hat{e}_1 = e_1$, dove $\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, si ha $M^{-1} e_1 = \hat{e}_1$. Dunque

$$Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} 2e_1 = 2M e^{tJ} \hat{e}_1 = 2M \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2M \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$2e^t \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$ cioè $x(t) = 4e^t$ $\quad y(t) = 2e^t$ $\quad z(t) - 2e^t$

Verifica $\quad x(t) = 4e^t \quad x'(t) = 4e^t \quad y(t) = 2e^t \quad y' = 2e^t \quad z(t) = -2e^t = z'(t)$

ALLORA:
$$\left.\begin{aligned} 4x - 6y &= 4\cdot 4e^t - 6\cdot 2e^t = (16-12)e^t = 4e^t = x' \\ 3x - 5y &= 3\cdot 4e^t - 5\cdot 2e^t = (12-10)e^t = 2e^t = y' \\ -3x + 3y - 2z &= -3\cdot 4e^t + 3\cdot 2e^t - 2(-2)e^t = (-12+6+4)e^t = -2e^t = z' \end{aligned}\right\} \text{TORNA}$$

È CHIARO ANCHE CHE $Y(0) = \begin{bmatrix} 4e^0 \\ 2e^0 \\ -2e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$