COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 12 gennaio 2019 - PARTE A

1. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+2^n}$, se ne calcoli (1p.) il raggio di convergenza R e si trovi (1p.) l'intervallo I in cui la serie converge.

$R =$ 2 $\qquad I =$]-2, 2[

2. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -2.$$

Posto $f(x,y) = g(xy+1, x-y^2)$ si calcoli (2,5 p.)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -1$$

3. Data la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) := (t^2, t^3)$ e il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x,y) := (x-y, x+y)$, si risponda alla domande seguenti:

$\vec{f}$ è conservativo (1p.) VERO FALSO

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{6}{5}$$ (2,5 p.)

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Sia $\vec{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$. Allora:
$\vec{f}$ è conservativo se e solo se $\vec{f}$ è irrotazionale VERO FALSO

(b) La forma quadratica $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $\Phi(x,y,z) := z^2 + (x+y)^2$ è:

definita | semidefinita | indefinita | nessuna delle precedenti

(c) Posto $M := \{(x,y) : x^2 - y^2 = 1\}$, allora M è

limitato e chiuso | limitato ma non chiuso | chiuso ma non limitato | né limitato né chiuso.

(d) Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è integrabile in senso improprio secondo Riemann, allora f è integrabile secondo Lebesgue. VERO FALSO.

(1) Se $a_n = \frac{1}{n+2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}+1}} \to \frac{1}{2}$ perché $\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}+1} \to 1$.

Dunque $R = \frac{1}{1/2} = 2$. Per i teoremi la serie converge su $]-2,2[$.

Se $x=2$ trovo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+2^n}$ che diverge perché $\frac{2^n}{n+2^n} = \frac{1}{\frac{n}{2^n}+1} \to 1$

Se $x=(-2)$ trovo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+2^n}(-1)^n$ che non converge dato che comunque $\left|\frac{(-2)^n}{n+2^n}\right| \to 1$.

(2) Pongo $\phi(x,y) = (xy+1, x-y^2)$. Allora $f = g \circ \phi$ in cui

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\circ\phi\right)\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\circ\phi\right)\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\circ\phi\right)x + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\circ\phi\right)(-2y)$$

Calcolo tutto in $(1,-1)$, notando che $\phi(1,-1) = (0,0) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)(-2)(-1) = 3\cdot 1 + (-2)(-2)(-1) = 3-4 = -1$$

(3) $\frac{\partial}{\partial y}(x-y) = -1 \quad \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1$ sono diversi $\Rightarrow \vec{f}$ non è irrotazionale

$$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2-t^3, t^2+t^3)(2t, 3t^2)\,dt =$$

$$\int_0^1 (2t^3 - 2t^4 + 3t^4 + 3t^5)\,dt = \int_0^1 (2t^3 + t^4 + 3t^5)\,dt =$$

$$\left[2\frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + 3\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6}{5}$$

(4) (a) vero perché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso (VEDI TEOREMA)

(b) $\phi(x,y,z) \geq 0$ essendo somma di due quadrati. Ma $\phi(x,x,0) = 0$ dunque non vale $\phi > 0$ su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. $\Rightarrow \phi$ è semidefinita positiva

(c) M è chiuso perché la funzione $g(x,y) = x^2-y^2-1$ è continua (e $M = \{g(x,y) \leq 0\}$). M non è limitato perché i punti $(x, \sqrt{x^2-1}) \in M$ per tutte le $x \geq 1$ e tali punti non sono limitati essendo $\|(x,\sqrt{x^2-1})\| = \sqrt{x^2+x^2-1} = \sqrt{2x^2-1}$ che diverge quando $x \to +\infty$

(d) È stato detto a lezione che $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è integrabile in senso improprio secondo Riemann su $[0,+\infty[$ MA (non assolutamente integrabile e quindi) NON integrabile secondo Lebesgue.

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := -6x + x^2 + 4xy^2 + y^4$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

   $(x,y) =$ $(3,0)$ punto di MINIMO $(x,y) =$ ______ punto di ______

   $(x,y) =$ $(-1,\sqrt{2})$ punto di SELLA $(x,y) =$ $(-1,-\sqrt{2})$ punto di SELLA

   (b) Si dica se (1,5p.)

   f ha max $\boxed{SI}$ $\boxed{\cancel{NO}}$ se sì $\max_{\mathbb{R}^2} f = \boxed{}$; f ha min $\boxed{SI}$ $\boxed{\cancel{NO}}$ se sì $\min_{\mathbb{R}^2} f = \boxed{}$.

   (c) Posto $M := \{(x,y) : x \geq 0\}$ si dica se (1,5p.)

   f ha max su M $\boxed{SI}$ $\boxed{\cancel{NO}}$ se sì $\max_M f = \boxed{}$; f ha min su M $\boxed{\cancel{SI}}$ $\boxed{NO}$ se sì $\min_M f = \boxed{-9}$.

Svolgimento

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6 + 2x + 4y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8xy + 4y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x + 12y^2$$

PTI CRITICI $\to \begin{cases} 2x + 4y^2 = 6 \\ 8xy + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} y=0 \\ x=3 \end{matrix}$ oppure $\begin{cases} x + 2y^2 = 3 \\ 2x + y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{matrix} y=0 \\ x=3 \end{matrix}$ oppure $\begin{cases} -3x = 3 \\ y^2 = -2x \end{cases}$

$\iff \begin{matrix} y=0 \\ x=3 \end{matrix}$ oppure $\begin{matrix} x=-1 \\ y^2 = 2 \end{matrix}$ DUNQUE HO TRE PUNTI $(3,0)$, $(-1, \pm\sqrt{2})$. INOLTRE

$$H_f(3,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} \Rightarrow (3,0) \text{ pto di minimo}$$

$$H_f(-1, \pm\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 2 & \pm 8\sqrt{2} \\ \pm 8\sqrt{2} & 16 \end{bmatrix}$$ che ha determinante $32 - 128 < 0 \Rightarrow$ $(-1, \pm\sqrt{2})$ pti di sella

(b) Se considero $x=0$ vedo che $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = \lim_{y \to \pm\infty} y^4 = +\infty$

e dunque $\sup f = +\infty$ (f NON HA MAX)

Se considero $x = -y^2$ vedo che $\lim_{y \to \pm\infty} f(-y^2, y) = \lim_{y \to -\infty} 6y^2 + y^4 - 4y^4 + y^4$

$= \lim_{y \to \pm\infty} 6y^2 - 2y^4 = -\infty$ DUNQUE $\inf f = -\infty$ E f NON HA MINIMO

(c) Dato che i punti $(0,y) \in M$ e che $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = +\infty \Rightarrow \sup_M f = +\infty$

(non c'è max su M). Invece non posso mandare f a $-\infty$ su M

dato che i punti $(-y^2, y) \notin M$, se $x \geq 0$ (cioè $(x,y) \in M$) si ha

$f(x,y) \geq -6x + x^2 + y^4$. Dato che $\lim_{x \to +\infty} -6x + x^2 = +\infty$ $\lim_{y \to \pm\infty} y^4 = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$ e quindi f HA MINIMO su M

Sia P_0 il punto di minimo. Se $P_0 \in \mathring{M} \Rightarrow P_0$ è critico e l'unico punto possibile è $P_0 = (3,0)$.

Se $P_0 \in \partial M$ dovrebbe essere stazionario vincolato su $\partial M = \{(0,y) \ y \in \mathbb{R}\}$

Ma questo vorrebbe dire (uso $g(x,y) = x$ per avere $M = \{g(x,y) = 0\}$)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + 4y^2 = \lambda \\ 4y^3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_0 := (0,0)$$

Confronto i due valori possibili: $f(0,0) = 0$, $f(3,0) = -18 + 9 = -9$

Dunque il minimo è in $P_0 = (3,0)$ e vale -9

2. Si considerino gli insiemi D, L, C e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$D := \{(x, y, x) : 0 \le z, z^2 \le x^2 + y^2 \le 1\},$$
$$L := \{(x, y, x) : 0 \le z \le 1, x^2 + y^2 = 1\},$$
$$C := \{(x, y, x) : 0 \le z, z^2 = x^2 + y^2 \le 1\},$$
$$\vec{f}(x, y, z) := x^3(z + y^2)\vec{\mathbf{i}} + y^3(z - x^2)\vec{\mathbf{j}} - z^2(x^2 + y^2)\vec{\mathbf{k}}.$$

Su L e C si considerino le normali uscenti da D. Si calcolino:

(a) il flusso $\Phi(\partial D)$ di $\vec{f}$ uscente da D attraverso ∂D (2p.)

$$\Phi(\partial D) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

(b) il flusso $\Phi(L)$ di $\vec{f}$ attraverso L (3p.); **suggerimento**: si utilizzi il teorema della divergenza per il dominio $D_1 := \{(x, y, z) : 0 \le z \le 1, x^2 + y^2 \le 1\}$

$$\Phi(L) = \boxed{\frac{3}{4}\pi}$$

(c) il flusso $\Phi(C)$ di $\vec{f}$ attraverso C (2p.)

$$\Phi(C) = \boxed{-\frac{7}{12}\pi}$$

Svolgimento

(a) $\operatorname{div} \vec{f} = 3x^2(z+y^2) + 3y^2(z-x^2) - 2z(x^2+y^2) = 3z x^2 + 3z y^2 - 2z(x^2+y^2) = \boxed{z(x^2+y^2)}$

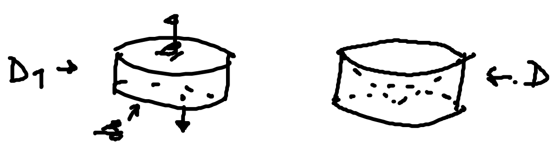
$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{f} = \iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z(x^2+y^2)\,dz\right)dx\,dy = \iint_{B(0,1)} (x^2+y^2)\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\iint_{B(0,1)} (x^2+y^2)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^4 \rho\,d\rho = \frac{1}{2}\,2\pi\int_0^1 \rho^5\,d\rho = \pi\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

(b) Notiamo che $\partial D_1 = B_0 \cup L \cup B_1$ dove

$B_0 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}$ $\quad B_1 = \{(x,y,1) : x^2+y^2 \le 1\}$

Inoltre la normale esterna a ∂D vale $-\vec{k}$ su B_0 e vale $\vec{k}$ su B_1



Calcoliamo $\iiint_{D_1} \operatorname{div}\vec{f} = \iiint_{D_1} z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$

$$= \iint_{B(0,1)} (x^2+y^2)\,dx\,dy \int_0^1 z\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\cdot\rho^2\,d\rho \int_0^1 z\,dz = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Inoltre $\displaystyle\iint_{B_0} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{B(0,1)} -f_3(x,y,0)\,dx\,dy = 0$ mentre

$$\iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{B(0,1)} f_3(x,y,1)\,dx\,dy = \iint_{B(0,1)} -(x^2+y^2)\,dx\,dy = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2\rho\,d\rho =$$

$$= -2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$ Dato che

$$\frac{\pi}{4} = \iint_{\partial D_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{B_0} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma + \iint_{L} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma + \iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{L} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma - \frac{\pi}{2}$$

si ricava $\displaystyle\iint_{L} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \frac{3}{4}\pi$

(c) Dato che $\partial D = B_0 \cup L \cup C$, da quanto trovato in (a) e (b) $\Rightarrow$

$$\frac{\pi}{6} = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{B_0} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma + \iint_{L} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma + \iint_{C} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 0 + \frac{3\pi}{4} + \iint_{C} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$$

e dunque $\displaystyle\iint_{C} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{4}\pi = \frac{2-9}{12}\pi = -\frac{7}{12}\pi$

3. Si consideri la funzione definita da $f(t) = 3t^2 - 2t^3$ per $0 \le t \le 1$.

(a) Si trovino i coefficienti di Fourier a_n e $\tilde\omega$ della serie di Fourier IN SOLI COSENI di f nell'intervallo $[0,1]$, di modo che: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\tilde\omega t)$ in $[0,1]$ (3p.)

$a_0 = \boxed{\frac{1}{2}}$, $a_n = \boxed{\frac{24}{\pi^4}\frac{1}{n^4}\left((-1)^n - 1\right)}$.

(b) Si dica (giustificando) se $\frac{d}{dt}f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dt}\cos(n\tilde\omega t)$ in $[0,1]$ $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (1p.).

(c) Si usi quanto sopra per calcolare la somma della seguente serie (2p.):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \boxed{\frac{\pi^4}{96}}$$

Svolgimento

Si ho $\tilde\omega = \frac{\pi}{L}$ dove $L = 1 \Rightarrow \tilde\omega = \pi$ e

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \int_0^1 (3t^2 - 2t^3)\,dt = \left[3\frac{t^3}{3} - 2\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

mentre se $n \ge 1$ $\quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos(n\tilde\omega t)\,dt = 2\int_0^1 (3t^2 - 2t^3)\cos(n\pi t)\,dt =$

$$2\left[(3t^2 - 2t^3)\underbrace{\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}}_{=0 \text{ se } t=0,1}\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (6t - 6t^2)\sin(n\pi t)\,dt =$$

$$-\frac{2}{n\pi}\left[\underbrace{(6t - 6t^2)}_{=0 \text{ se } t=0,1}\frac{\cos(n\pi t)}{-n\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 (6 - 12t)\cos(n\pi t)\,dt =$$

$$-\frac{2}{n^2\pi^2}\left[(6 - 12t)\underbrace{\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}}_{=0 \text{ se } t=0,1}\right]_0^1 + \frac{2}{n^3\pi^3}\int_0^1 (-12)\sin(n\pi t)\,dt = \frac{-24}{n^3\pi^3}\left[\frac{\cos(n\pi t)}{-n\pi}\right]_0^1 =$$

$$\frac{24}{n^4\pi^4}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ PARI} \\ \frac{-48}{(2k+1)^4\pi^4} & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

Dunque

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{(2k+1)^4} \qquad (*)$$

(b) dato che $|a_n| \sim \frac{1}{n^4} \Rightarrow n|a_n| \simeq \frac{1}{n^3}$ e $\sum \frac{1}{n^3} < +\infty$

si può derivare per serie

(c) uso $(*)$ con $t = 0$ $\Rightarrow 0 = f(0) = \frac{1}{2} - \frac{48}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

4. $\left(\square\right.$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16$\left.\right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -3x + 2y + 5z \\ y' &= -6x + 5y + 6z \\ z' &= x - y + z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema e λ_i i suoi autovalori. Indichiamo con $m_A(\lambda_i)$ e $m_G(\lambda_i)$ le molteplicità algebrica e geometricadi ogni λ_i.

(a) si mostri che A ha due autovalori e li si scriva con le rispettive molteplicità (1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{-1}, m_A(\lambda_1) = \boxed{1}, m_G(\lambda_1) = \boxed{1};$$

$$\lambda_2 = \boxed{2}, m_A(\lambda_2) = \boxed{2}, m_G(\lambda_2) = \boxed{1}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per A (3p.) e la relativa forma di Jordan(1p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ \boxed{0} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = -1$, $y(0) = -1$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{-e^{-t}}$$

$$y(t) = \boxed{-e^{-t}}$$

$$z(t) = \boxed{0}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -6 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ calcolo il polinomio caratteristico $\rightarrow$

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 2 & 5 \\ -6 & 5-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(\lambda+3)(\lambda-5)(1-\lambda) + 12 + 30 - \left(6(\lambda+3) + 5(5-\lambda) + 12(\lambda-1)\right)$$

$$= (\lambda^2 - 2\lambda - 15)(1-\lambda) + 42 - 6\lambda - 18 - 25 + 5\lambda - 12\lambda + 12 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 15 - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 15\lambda + 11 - 13\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

NOTO CHE $P(-1) = 0$ USO RUFFINI

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & -1 & 4 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$P(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

$\lambda_1 = -1$ $m_A(\lambda_1) = 1$ $m_G(\lambda_1) = 1$ $\lambda_2 = 2$ $m_A(\lambda_2) = 2$ $m_G(\lambda_2) = ??$

(b) $\underline{\lambda = \lambda_1}$ Prendo $B = A + I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ -6 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e cerco e_1 nel $\operatorname{Ker}(B)$. Se $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ho

$$\begin{cases} -2x + 2y + 5z = 0 \\ -6x + 6y + 6z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9z = 0 \\ 18z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

per esempio $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = \lambda_2}$ Prendo $B = A - 2I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ vedo che B ha rango 2

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

calcolo $B^2 = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -9 & -18 \\ 18 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ che ha rango 1

cerco $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2$ con $Be_3 \neq 0$ Se $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deve essere

$18x - 9y - 18z = 0$ cioè $y = 2(x - z)$ $\quad e_3 = \begin{pmatrix} x \\ 2(x-z) \\ z \end{pmatrix}$

Se prendo $x = 1, z = 0$ vedo che $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$ e posso allora prendere

$e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = Be_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Noto che il dato iniziale $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è uguale a $-e_1$

So che la soluzione è $Y(t) = e^{tA} Y_0$ e per (b) si ho

$A = M J M^{-1}$ con $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. DATO CHE $e_1 = M\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = M\hat{e}_1$ SI HA $M^{-1}e_1 = \hat{e}_1$ e quindi $M^{-1}Y_0 = -\hat{e}_1$

DUNQUE $Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} \underset{\underset{e_1}{\shortparallel}}{Y_0} = -M e^{tJ} \hat{e}_1 =$

$$-M \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -M \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Verifica</u> $\quad x(t) = -e^{-t} \quad x'(t) = e^{-t}$

$y(t) = -e^{-t} \quad y'(t) = e^{-t}$

$z(t) = z'(t) = 0$

$-3x + 2y + 5z = 3e^{-t} - 2e^{-t} = e^{-t} = x'$

$-6x + 5y + 6z = 6e^{-t} - 5e^{-t} = e^{-t} = y'$

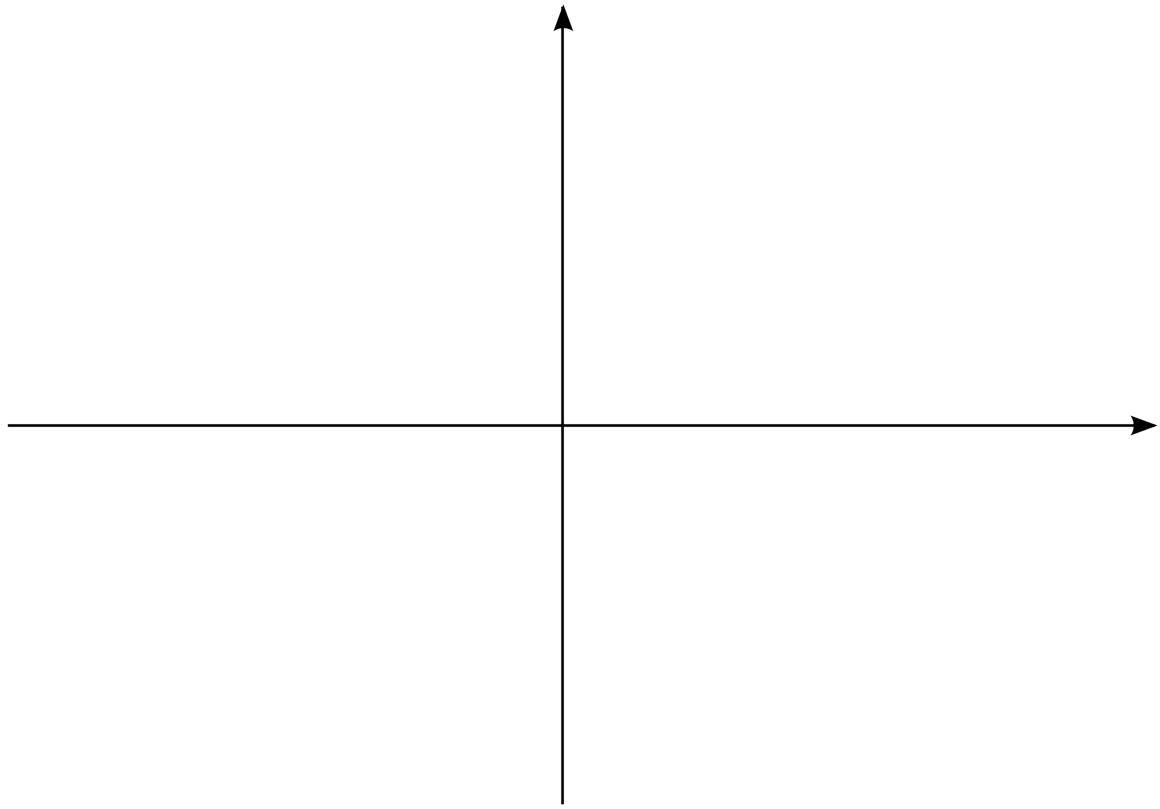
$x - y + z = e^{-t} - e^{-t} = 0 = z'$

Variante esercizio 4 della seconda parte: solo gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(4y - 12x^2)}{y(5y - 8x^2)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovino un fattore integrante λ della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ (2p.) e un integrale primo Φ (2p.) per l'equazione.

$\lambda(x, y) =$

$\Phi(x, y) =$

3. Si trovi esplicitamente la soluzione $y(x)$ tale che $y(1) = 2$ (1p.)

$y(t) =$.

Svolgimento