COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 16 novembre 2018 - PARTE A[1]

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ e supponiamo che il polinomio di Taylor di ordine 3, nel punto $(1, -1)$ sia:

$$P_3(x, y) = 5 + (x-1)(y+1) + (x-1)^3 - (x-1)(y+1)^2 + 4(y+1)^3.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(a) $(1, -1)$ è un punto stazionario SI NO (1p.);

(b) $(1, -1)$ è di minimo relativo, massimo relativo, sella, nessuna di queste (1p.) ;

(c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1, -1) = \boxed{-2}$ (2p.)

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione differenziabile tale che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = -3, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 4.$$

Poniamo $g(x, y) := f(x - y, xy - 1)$. Si dica quanto fa (2p.)

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1) = \boxed{7}.$$

3. L'insieme $A := \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 < 1\}$ è aperto in $\mathbb{R}^2$ (1p.) SI NO;
la sua frontiera è data da $\partial A = \{(x, y) : 0 = x^2 + y^2\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ (1p.) SI NO.

4. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva. Allora

(a) se γ è rettificabile, allora γ è continua (1p.) SI NO;

(b) se γ è $\mathcal{C}^1([a, b])$, allora γ è rettificabile (1p.) SI NO.

5. Si scriva la definizione di differenziabilità/differenziale per una funzione f e si dimostri che, se f è differenziabile in un punto x_0, allora esiste $f'(x_0)(\vec{v})$ per qualunque direzione $\vec{v}$. (4p.).

Svolgimento

__Def.__ Data $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è aperto, (o $f : \Omega \to X_1$, $\Omega \subset X$ spazi normati)

dato $x_0 \in \Omega$ si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ (o $L : X \to X_1$)

[1] Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

con L lineare e tale che:

$$\circledast \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{\|x-x_0\|}=0$$

Tale L si dice differenziale per f in x_0

<u>Teorema</u> Se L è un differenziale per f in x_0 (cioè se vale $\circledast$) allora per ogni $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ esiste $f'(x_0)(\vec{v})$ e vale

$$f'(x_0)(\vec{v})=L\vec{v}$$

<u>Dim.</u> Suppongo $\vec{v}\neq 0$. Dal limite ($\circledast$), considerando la restrizione $x=x_0+t\vec{v}$ ottengo

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)-L(x_0+t\vec{v}-x_0)}{\|x_0+t\vec{v}-x_0\|}=0 \iff$$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)-tL\vec{v}}{t\|\vec{v}\|}\right\|=0 \iff \lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t}-L\vec{v}\right\|=0$$

$$\iff \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\vec{v})-f(x_0)}{t}=L\vec{v}\quad (\leftarrow \text{che è la tesi})$$

SPIEGAZIONE DELLE RISPOSTE AI PUNTI 1-4.

(1) Dallo sviluppo di Taylor si ricavano le derivate parziali nel punto $(1,-1)$. Dal fatto che non compaiono termini di primo grado (in $(x-1)$ o in $(y+1)$) segue che $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)=0$. Guardando i termini di II° grado (cioè il solo $(x-1)(y+1)$) vedo che l'Hessiana è $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ che ha determinante negativo e quindi ho una sella. Infine il coefficiente di $(x-1)(y+1)^2$, che è -1, deve essere uguale a $\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,-1)$ e dunque $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1,-1)=-2$ (si noti che $\frac{1}{2}=\frac{1}{(1,2)!}$ dove $(1,2)$ è il multiindice α tale che $D\alpha f=\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}$)

(2) Le informazioni fornite ci dicono che $J_f(0,0)=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&4\end{bmatrix}$. Inoltre $g=f\circ\phi$ dove $\phi(x,y)=\begin{pmatrix}x-y\\xy-1\end{pmatrix}$. Dato che $\phi(1,1)=(0,0)$ abbiamo $J_g(1,1)=J_f(0,0)J_\phi(1,1)$. Ma $J_\phi(x,y)=\begin{bmatrix}1&-1\\y&x\end{bmatrix}\Rightarrow J_\phi(1,1)=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ e dunque $J_g(1,1)=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\1&7\end{bmatrix}$. In particolare $\frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1)=7$

(3) In effetti $A=\{x^2+y^2<1\}$ che il disco <u>aperto</u> di centro $(0,0)$ e raggio 1 e dunque la sua frontiera è $\partial A=\{x^2+y^2=1\}$.

(4) Si è visto a lezione che ci sono curve rettificabili ma non continue. Si è anche visto che se γ è $C^1\Rightarrow\gamma$ è rettificabile e che la lunghezza "geometrica" di γ coincide con $\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := e^{xy+2} + 4x^2 + 3xy + y^2$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

   $(x,y) = \boxed{(0,0)}$ punto di SELLA $\quad (x,y) = \boxed{}$ punto di ______

   $(x,y) = \boxed{(1,-2)}$ punto di MINIMO $\quad (x,y) = \boxed{(-1,2)}$ punto di MINIMO

   (b) Si dica se f ammette minimo su $\mathbb{R}^2$ e in caso affermativo lo si calcoli (3p.)

   $$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \boxed{3} \quad \boxed{\text{non esiste}}.$$

Svolgimento

(a)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,e^{xy+2} + 8x + 3y \; ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,e^{xy+2} + 3x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy+2} + 8 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy+2} + 2 \; , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+xy)\,e^{xy+2} + 3$$

PTI CRITICI
$$\begin{cases} (e^{xy+2} + 3)\,y + 8x = 0 \\ (e^{xy+2} + 3)\,x + 2y = 0 \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA I PER x, LA II PER y E FACCIO LA DIFFERENZA TROVO $4x^2 = y^2$ CIOÈ $y = \pm 2x$

METTO $y = 2x$ NEL SISTEMA

$$\begin{cases} y = 2x \\ (e^{2x^2+2} + 3)\,2x + 8x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = 2x \\ (e^{2x^2+2} + 3)\,2 + 8 = 0 \end{cases} \text{ IMPOSSIBILE}$$

METTO $y = -2x$ NEL SISTEMA

$$\begin{cases} y = -2x \\ -(e^{-2x^2+2} + 3)\,2x + 8x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ x = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = -2x \\ 4 = e^{2(1-x^2)} + 3 \end{cases}$$

L'ULTIMO SISTEMA MI DÀ

$$\begin{cases} y = -2x \\ 1 = e^{2(1-x^2)} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2(1-x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

IN TUTTO HO TRE PUNTI CRITICI $(0,0)$, $\pm(1,-2)$

CALCOLO GLI HESSIANI

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & e^2+3 \\ e^2+3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{HA DET.} < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ di SELLA} \quad (e^2 > 1 \,!!)$$

$Hf(1,-2) = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ HA DET. >0 e $a_{11} = 12 > 0$
$\Rightarrow$ $(1,-2)$ è di MINIMO (lo stesso per $(-1,2)$)

(b) Mostro che $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$. Infatti (dato che l'esponenziale è ≥ 0) $f(x,y) \geq 4x^2 + 3xy + y^2$.

ORA SI HA $3xy = \frac{3}{2}(2x)y \leq \frac{3}{2} \frac{(2x)^2 + y^2}{2} = \frac{3}{4}(4x^2+y^2)$

DA CUI $f(x,y) \geq \frac{1}{4}(4x^2+y^2) \geq \frac{1}{4}(x^2+y^2) = \frac{\|(x,y)\|^2}{4}$

Per il teorema del confronto $\Rightarrow$ $f(x,y) \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$

Per "Weierstrass generalizzato" $\Rightarrow$ $\exists \min_{\mathbb{R}^2} f$. MA ALLORA C'È UN PUNTO DI MINIMO E PER QUANTO TROVATO IN (a) QUESTO PUNTO È UNO TRA $\pm(1,-2)$. Dato che $f(1,-2) = f(-1,2) = 3$ il minimo vale 3

2. Si calcoli la lunghezza del grafico della funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$:

$$\ell(G(f)) = \boxed{e - e^{-1} \quad \left(= \frac{e^2-1}{e}\right)} \quad \text{(5p.)}$$

Si scriva inoltre una curva regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ che percorre tale grafico:

$$\gamma(t) = \boxed{\gamma(t) = \left(t, \frac{e^t+e^{-t}}{2}\right) = (t, \cosh(t))} \quad \text{per } t \in [-1, 1] \text{ (2p.)}$$

Svolgimento

(a) Notiamo che $f(x) = \cosh(x)$. Allora $f'(x) = \sinh(x)$.

Dalle formule viste si ha

$$\ell(G(f)) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2(x)}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2(x)}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \cosh(x)\, dx = \Big[\sinh(x)\Big]_{-1}^{1} = \sinh(1) - \sinh(-1) = 2\sinh(1)$$

$$= e^{1} - e^{-1}$$

(b) Se voglio descrivere il grafico di una $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ devo usare la curva $\gamma(t) = (t, f(t))$, per $t \in [a,b]$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si provi che f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$ (3p.).

(b) Se inoltre $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si mostri che esiste $f'(\mathbf{0})(\vec{v})$ e lo si calcoli (2p.):

$$f'(\mathbf{0})(\vec{v}) = \boxed{1/2}$$

(c) Se ne deduca infine che f non è differenziable in $\mathbf{0}$ (3p.).

Svolgimento

(a) Dato che $|xy| \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ si ha $|f(x,y)| \le |y| \dfrac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \dfrac{|y|}{2}$

Dato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|y|}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ ⊛

e dunque f è continua in $(0,0)$

(b) Per def. di derivata direzionale rispetto a $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$f'(0)(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v}) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{tv_1 (tv_2)^2}{t^2v_1^2 + t^2v_2^2} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3(v_1^2+v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$$

DUNQUE $f'(0)(\vec{v})$ esiste per ogni $\vec{v}$. In particolare

se $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ trovo $\dfrac{1\cdot(-1)^2}{1^2+(-1)^2} = \dfrac{1}{2}$ (si poteva fare subito con $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ senza il generico $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$)

(c) Se f fosse differenziabile $\Rightarrow \vec{v} \mapsto f'(0)(\vec{v})$ sarebbe lineare in $\vec{v}$

e in particolare avrei:

$$\frac{1}{2} = f'(0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f'(0)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = f'(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - f'(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0).$$

MA È CHIARO che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0) = 0 \Rightarrow$ ASSURDO

⊛ si può anche fare: $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow |f(x,y)| \le |x| \Rightarrow \dots$