COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 15 settembre 2018 - PARTE A

1. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si scriva la definizione del raggio di convergenza (indicato con R) (1p.). Si enuncino poi le proprietà di convergenza della serie in termini di R (2p.)

Posto $L := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ si pone $R = 1/L$ $\left(\begin{array}{l} R=0 \text{ se } L=+\infty \\ R=+\infty \text{ se } L=0 \end{array} \right)$

Allora la serie

(a) Converge puntualmente su $\{x : |x| < R\}$

(b) converge totalmente (e quindi uniformemente) su $\{x : |x| \leq \rho\}$ per ogni $\rho < R$

(c) Non converge in nessun x con $|x| > R$

(non si dice nulla sulle x t.c. $|x| = R$)

2. Si considerino le due funzioni $\Phi, \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite da:

$$\Phi(x, y) := (xy, 2x - 3y), \quad \Psi(t, w) := (e^w, \sin(t)).$$

Posto $\Gamma(x, y) := \Psi(\Phi(x, y))$ si trovi (3p.):

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial y}(2, \pi) = \boxed{2}$$

3. Dato $c \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme

$$M_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy - y^6 = c\}.$$

Per quali valori di c in $\mathbb{R}$ l'insieme M_c è localmente una curva regolare ? (3p.)

c tale che $\boxed{c \neq 0}$

4. Si calcoli (3p.) l'area della superficie parametrica definita da:

$$\Gamma(u,v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad u^2 + v^2 \le 1$$

La superficie è grafico di $g(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow$ Area $= \iint_B \sqrt{1+|\nabla g|^2}\, dx\,dy$ (con $B = \{x^2+y^2 \le 1\}$) $= \iint_B \sqrt{1+4x^2+y^2}\, dx\,dy = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho =$

$\pi \int_0^1 \sqrt{1+4s}\, ds = \pi \left[\frac{2}{3}\frac{1}{4}(1+4s)^{3/2} \right]_0^1 =$

$\frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che $\vec{f}$ sia irrotazionale. Allora $\vec{f}$ è conservativo se e solo se Ω è semplicemente connesso. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$.

(b) Se $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$ è misurabile, allora ha senso considerare l'integrale di f su tutto $\mathbb{R}^N$ $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^2$, se $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e se la matrice Hessiana $H_f(x,y)$ è semidefinita negativa in tutto $\mathbb{R}^2$, allora si può dedurre che il punto $(0,0)$ è:

$\boxed{\text{di minimo locale}}$ $\boxed{\text{di massimo locale}}$ $\boxed{\text{di minimo assoluto}}$ $\boxed{\cancel{\text{di massimo assoluto}}}$ $\boxed{\text{nessuna di queste}}$

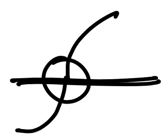
(d) Se $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo solenoidale, allora $\int_{\partial D} \vec{f} \cdot \nu \, d\sigma = 0$ per ogni dominio regolare D $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(2) Dalla def. si ha $T(x,y) = \left(e^{2x-3y}, \sin(x,y)\right) \Rightarrow \frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sin(x,y) = x\cos(xy)$

che calcolato per $x=2$ $y=\pi$ mi da $2\cos(2\pi)=2$

(3) Posto $g(x,y) = xy - y^6 - c \Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} y \\ x-6y^5 \end{pmatrix}$. I pti stazionari di g sono dati da $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ e $g(0,0) = -c$. Dunque se $c \neq 0$ non ci sono pti critici su $M_c \Rightarrow M_c$ regolare (Dini). Se $c=0$

$M_c = \{y=0\} \cup \{x = y^5\}$ che sono due curve che si intersecano in zero



$\Rightarrow M_0$ NON regolare

(5a) Ci sono campi conservativi anche su aperti non semp. conn.

(5c) Se $H_f \le 0$ su tutto $\mathbb{R}^2$ f è concava e l'origine è di max assoluto

(5d) perchè la divergenza è zero.

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 15 settembre 2018 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := 4e^{xy^2+2} + x^2 + 4y^4$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f DIVERSI DA $(0, 0)$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (2,5p.).

   $(x, y) =$ $(-2, 1)$ punto di MINIMO $(x, y) =$ $(-2, -1)$ punto di MINIMO

   $(x, y) =$ ____ punto di ____ $(x, y) =$ ____ punto di ____

   (b) Si dica se (1,5p.)

   f ha max SI ~~NO~~ se sì $\max_{\mathbb{R}^2} f =$ ☐; f ha min ~~SI~~ NO se sì $\min_{\mathbb{R}^2} f =$ $\boxed{12}$.

   (c) Si stabilisca come si comporta f vicino a $(0, 0)$ (2p.):

   $(0, 0)$ è di max locale min locale ~~nessuno dei due~~.

   (suggerimento: si provi a valutare $f(\pm\sqrt{t}, \sqrt[4]{t})$ per $t > 0$ vicino a zero).

Svolgimento

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y^2 e^{xy^2+2} + 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 8xy\, e^{xy^2+2} + 16y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y^4 e^{xy^2+2} + 2 \quad \Big| \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8y\, e^{xy^2+2} + 8xy^3 e^{xy^2+2} = 8y(1+xy^2)\, e^{xy^2+2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x e^{xy^2+2} + 16x^2y^2 e^{xy^2+2} + 48y^2 = 8x(1+2xy^2)e^{xy^2+2} + 48y^2$$

(a) PTI CRITICI $\neq (0,0)$

$$\begin{cases} 4y^2 e^{xy^2+2} + 2x = 0 \\ 8xy\, e^{xy^2+2} + 16y^3 = 0 \end{cases} \underset{\substack{(\text{se } y=0 \\ \Rightarrow x=0)}}{\iff} \begin{cases} x = -2y^2 e^{xy^2+2} \\ 2y^2 = -x\, e^{xy^2+2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2y^2 = 2y^2 \left(e^{xy^2+2}\right)^2 \underset{(y\neq 0)}{\Updownarrow} 1 = e^{xy^2+2} \Updownarrow xy^2+2 = 0$$

Metto la condizione $xy^2+2=0$ nel sistema:

$$\begin{cases} xy^2+2=0 \\ x = -2y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^4 = 2 \\ x = -2y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

INOLTRE È CHIARO CHE $(0,0)$ è punto critico

Calcolo l'Hessiana in questi punti:

$$H_f(-2, \pm 1) = \begin{bmatrix} 6 & \mp 8 \\ \mp 8 & 96 \end{bmatrix}$$

ha det. >0 e $a_{11} = 6 > 0 \Rightarrow$ pto di min. locale

(b) Si vede che $f(x,y) \geq x^4 + 4y^4 \Rightarrow \lim_{\|x,y\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$

Da questo segue che non esiste massimo ed esiste minimo

Il minimo è assunto in uno dei punti $(0,0)$, $(-2,\pm 1)$. Si ha

$f(0,0) = 4e^2$, $f(-2,1) = 12$ (N.B.: $e^2 > 3$) $\Rightarrow$ min è in $(-2,1)$

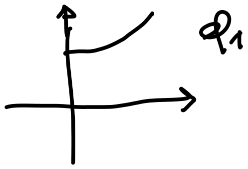
(c) Se pongo $\varphi_1(t) = f(\sqrt{t}, \sqrt[4]{t}) \Rightarrow \varphi_1(t) = 4e^{t+2} + t + 4t = 4e^{t+2} + 5t$

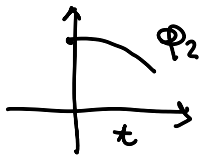
$\varphi_2(t) = f(-\sqrt{t}, \sqrt[4]{t}) \Rightarrow \varphi_2(t) = 4e^{-t+2} + t + 4t = 4e^{-t+2} + 5t$

Chiaramente $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 4e^2$. MA

$\varphi_1'(t) = 4e^{t+2} + 5$ e $\varphi_1'(0) = 4e^2 + 5 > 0$, mentre

$\varphi_2'(t) = -4e^{-t+2} + 5$ e $\varphi_2'(0) = -4e^2 + 5 < 0$





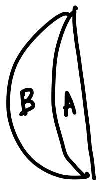
DUNQUE se $t > 0$ piccolo

$$f(-\sqrt{t}, \sqrt[4]{t}) < 4e^2 < f(\sqrt{t}, \sqrt[4]{t})$$

$\Rightarrow (0,0)$ NÉ MAX NÉ MIN

2. Si considerino il dominio D definito e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$D := \left\{(x,y,x)\ : x^2+y^2+z^2 \le 1, x+y \ge 0, x-y \ge 0\right\},$$
$$\vec{f}(x,y,z) := e^z\left((x^2-y^2)(x\vec{\mathbf{i}} - y\vec{\mathbf{j}}) + (4-4z+2z^2)\vec{\mathbf{k}}\right).$$



(a) Dando per buono che l'immagine sopra rappresenta D si trovi una descrizione matematica delle tre superfici A, B e C che compongono ∂D (1,5p.) (nel disegno C, analoga ad A, è nascosta).

$A =$ $\{x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \geq 0,\ x = y\}$

$B =$ $\{x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y \geq 0\ \ x-y \geq 0\}$

$C =$ $\{x^2+y^2+z^2 \le 1\ \ x \geq 0\ \ x = -y\}$

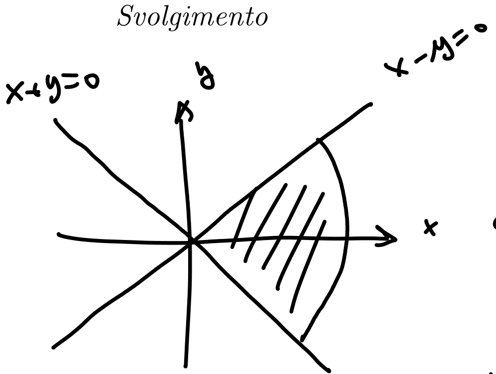
(b) Si trovino i flussi di $\vec{f}$ attraverso i tre insiemi indicati sopra, prendendo su ognuno di essi la normale uscente da D (4,5p.).

$\Phi(\vec{f}, A) =$ 0

$\Phi(\vec{f}, B) =$ $-2\pi e + 16\pi e^{-1}$

$\Phi(\vec{f}, C) =$ 0

Svolgimento



SEZIONE ORIZZONTALE DI D

(a) è standard.

(b) conviene usare la divergenza (e poi vediamo)

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} e^z(x^2-y^2)\,x + \frac{\partial}{\partial y} e^z(x^2-y^2)(-y) + \frac{\partial}{\partial z} e^z(4-4z+2z^2) =$$

$$e^z(3x^2-y^2) - e^z(x^2-3y^2) + e^z(\cancel{4} - 4\cancel{z} + 2z^2 - \cancel{4} + \cancel{4z}) = e^z(2x^2+2y^2+2z^2)$$

Allora $\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_D 2e^{z}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ = (coord. sferiche)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\pi} d\psi \int_0^1 d\rho \; e^{\rho\cos\psi}\cdot 2\rho^2\cdot \rho^2\sin\psi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 2\rho^4\left(\int_0^{\pi} e^{\rho\cos\psi}\sin\psi\, d\psi\right)d\rho =$$

$(\cos\psi = t,\ -\sin\psi\, d\psi = dt)$ $= \pi\int_0^1 \rho^4\left(\int_1^{-1} e^{\rho t}(-dt)\right)d\rho = \pi\int_0^1 \rho^4\left(\int_{-1}^{1} e^{\rho t}\, dt\right)d\rho =$

$$\pi\int_0^1 \rho^4\left[\frac{e^{\rho t}}{\rho}\right]_{t=-1}^{t=1} = \pi\int_0^1 \rho^3\left(e^{\rho}-e^{-\rho}\right)d\rho = 2\pi\int_0^1 \rho^3\sinh(\rho)\,d\rho =$$

(per parti) $2\pi\left[\rho^3\cosh(\rho)\right]_0^1 - 2\pi\int_0^1 3\rho^2\cosh(\rho)\,d\rho =$

$$2\pi\cosh(1) - 6\pi\left[\rho^2\sinh(\rho)\right]_0^1 + 6\pi\int_0^1 2\rho\sinh(\rho)\,d\rho =$$

$$2\pi\cosh(1) - 6\pi\sinh(1) + 12\pi\left[\rho\cosh(\rho)\right]_0^1 - 12\pi\int_0^1\cosh(\rho)\,d\rho =$$

$$2\pi\cosh(1) - 6\pi\sinh(1) + 12\pi\cosh(1) - 12\pi\left[\sinh(\rho)\right]_0^1 =$$

$$14\pi\cosh(1) - 18\pi\sinh(1) = 14\pi\,\frac{e+e^{-1}}{2} - 18\pi\,\frac{e-e^{-1}}{2} = \boxed{-2\pi e + 16\pi e^{-1}}$$

NOTIAMO ORA CHE SU A si ha $\nu = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

(perché A è definito da $\{\underbrace{x-y}_{g_1(x,y,z)} = 0\}$ e $\nabla g_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$)

MENTRE SU C si ha $\nu = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (per analogo motivo)

Dunque $\iint_A \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_A (f_1 - f_2)\,d\sigma$ MA SI VEDE CHE

su A $f_1(x,y) = f_2(x,y) = 0$ (per la presenza del fattore x^2-y^2)

ANALOGAMENTE $\iint_C \vec{f}\cdot\nu\,d\sigma = \iint_C (f_1+f_2)\,d\sigma = 0$

Dato che $\underbrace{\iint_A \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma}_{=0} + \iint_B \vec{f}\,\vec{\nu}\,d\sigma + \underbrace{\iint_C \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma}_{=0} = \iint_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$

$$\Rightarrow \iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 2\pi\left(-e+8e^{-1}\right)$$

3. Si consideri la funzione definita da $f(t) = \sin(t/2)$ per $0 \le t \le \pi$.

(a) Si trovino i coefficienti di Fourier a_n e $\tilde\omega$ della serie di Fourier IN SOLI COSENI di f nell'intervallo $[0,\pi]$: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\tilde\omega t)$ (3p.)

$a_0 = \boxed{\frac{2}{\pi}}$, $a_n = \boxed{-\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}}$.

(b) Si dica (giustificando) se la serie converge uniformemente a f ~~SI~~ NO (1p.).

(c) Si usi quanto sopra per calcolare la somma della seguente serie (2p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Svolgimento

Si ha $\tilde\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L} = 1$. Dunque:

(a) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t/2)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-2\cos(t/2)\right]_0^\pi = -\frac{2}{\pi}(0-1) = \frac{2}{\pi}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t/2)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[-2\cos(t/2)\cos(nt)\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2\cos(t/2)(-n)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{4}{\pi} - \frac{4n}{\pi}\underbrace{\left[2\sin(t/2)\sin(nt)\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{4n}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(t/2)\,n\cos(nt) =$$

$$\frac{4}{\pi} + 4n^2\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t/2)\cos(nt)\,dt = \frac{4}{\pi} + 4n^2 a_n.$$ Allora

$$(1-4n^2)a_n = \frac{4}{\pi} \iff a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

(b) Dato che $a_n \simeq \frac{1}{n^2}$ la serie converge unif.

(c) Si ha $f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nt)$. Se metto $t=0$

$$0 = f(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

4. $\left(\boxed{} \right.$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16 $\left. \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + z \\ y' &= -x + z \\ z' &= -x + y - z \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Diamo per buono che A ha un solo autovalore λ e siano m_A ed m_G le molteplicità algebrica e geometrica di λ. Allora (1p.):

$$\lambda = \boxed{-1}, m_A = \boxed{3}, m_G = \boxed{}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(3p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ e $z(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{(t^2/2 + t)e^{-t}}$$

$$y(t) = \boxed{(t^2/2 + t + 1)e^{-t}}$$

$$z(t) = \boxed{t\, e^{-t}}$$

Svolgimento

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$

(conti ...)

$P(\lambda) = -(\lambda+1)^3 \Rightarrow \lambda = -1 \quad m_A = 3$. Pongo

(b) $B = A + I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ rango $= 2 \Rightarrow m_G = 1$

$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rango $= 1$ $\qquad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

cerco e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$; PER ESEMPIO $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, allora

$e_1 = B^2 e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e prendo $e_2 = B e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(\Rightarrow B e_2 = e_1)$

(c) Si ha $Y(t) = e^{tA} Y_0$ dove $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\left(= e_3 \;!! \right)$

Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ vale che $e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} =$

$e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^{-1}$. Noto che $M \hat{e}_3 = e_3 \Rightarrow M^{-1} e_3 = \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow Y(t) = e^{-t} M \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{-t} M \begin{bmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$e^{-t} \begin{bmatrix} t^2/2 + t \\ t^2/2 + t + 1 \\ t \end{bmatrix}$$

NESSUNO HA SVOLTO LA VARIANTE