COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 30 giugno 2018 - PARTE A

1. Sia scriva l'enunciato del teorema del differenziale totale (2p.)

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, se $x_0 \in \Omega$ e se esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1..N$, per tutte le $x \in \Omega$ e se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono continue in x_0 $\left(\lim_{x \to x_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right)$ ALLORA

f è differenziabile in x_0

2. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ e siano $f_n : A \to \mathbb{R}$. Si scriva la definizione di convergenza totale su A per la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (2p.)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge TOTALMENTE su A se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < +\infty \quad (\text{è convergente})$$

3. Si considerino l'insieme $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, xyz = -1\}$ e il punto $P_0 = (1, 1, -1)$. Si vede facilmente che $P_0 \in M$. Si mostri che vicino al punto P_0 l'insieme M è descritto da una curva regolare $\gamma(t) = (x(t), t, z(t))$, dove t varia in un intorno di 1 e $\gamma(1) = P_0$ (1,5p.). Si trovi inoltre (1,5p.)

$$\gamma'(1) = (1 , 1 , 0)$$

(NON CONTA) $M = \{ g(x,y,z) = (0,0) \}$ dove $g(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, xyz + 1)$. Si ha:

$$J_g(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix} \Rightarrow J_g(P_0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Allora}$$

$\frac{\partial g}{\partial(x,z)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ che ha determinante $4 \neq 0$. Per il Dini allora esiste la curva γ come detto sopra; altrimenti detto si possono esplicitare i punti di M vicini a P_0 come grafico di due funzioni $x(y)$ e $z(y)$. Sempre per il Dini si ha

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} x(1) \\ \frac{\partial}{\partial y} z(1) \end{bmatrix} = -\left(\frac{\partial g}{\partial(x,z)}(P_0)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial y}(P_0) = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$. Dunque $\gamma'(1) = (x'(1), 1, z'(1)) = (1, 1, 0)$

4. Si dica se il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x,y) := \frac{x}{x^2+y^4}\vec{\mathbf{i}} + \frac{2y^3}{x^2+y^4}\vec{\mathbf{j}}$ è conservativo (2p.)

Cerco un potenziale $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$. Devo avere

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^4} \Rightarrow F(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^4}\,dx + c(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^4) + c(y)$$

Provo a derivare in y $\Rightarrow$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^4}\cdot 4y^3 + c'(y)$

VEDO CHE posso prendere c = costante ($\Rightarrow c'=0$) di modo che

$F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^4)$ è un potenziale $\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Sia A una matrice simmetrica 3×3 e siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ gli autovalori di A. Una condizione sufficiente che garantisce che A sia strettamente positiva è:

$\boxed{a}$ $\lambda_3 < 0$ $\boxed{b}$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0$,

$\boxed{c}$ $\lambda_1 > 0, \lambda_1\lambda_2 < 0, \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$, $\boxed{\cancel{d}}$ $\lambda_1 > 0, \lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$.

(b) Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\mathbb{R}^N$, allora f è continua in $\mathbb{R}^N$ $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è una curva di lunghezza finita, che indico con $\ell(\gamma)$, allora $\|\gamma(a) - \gamma(b)\| \leq \ell(\gamma)$. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(d) Sia $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ una funzione T periodica, dispari, misurabile e tale che $\int_0^T |f(t)|^2\,dt < +\infty$ (f ha energia finita). Se b_n sono i coefficienti di Fourier: $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$, allora:

$\boxed{a}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$, $\boxed{\cancel{b}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < +\infty$, $\boxed{c}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n| < +\infty$, $\boxed{d}$ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n| < +\infty$.

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 30 giugno 2018 - PARTE B   Cognome/Nome:

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := x^4 - 9y^3 + 24xy$ e l'insieme $M := \{(x, y) : 0 \le y \le x\}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

   $(x, y) =$ (0,0) punto di SELLA $(x, y) =$ (2,- 4/3) punto di MINIMO

   $(x, y) =$ ______ punto di ______ $(x, y) =$ ______ punto di ______

   (b) Si dica se (1p.)

   f è limitato superiormente SI ~~NO~~, f è limitato inferiormente SI ~~NO~~.

   (c) Si dica se f ha massimo/minimo su M e in caso affermativo si calcolino tali valori (2p.):

   $\min_M f =$ 0 non esiste / $\max_M f =$ ______ ~~non esiste~~

Svolgimento

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 24y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -27y^2 + 24x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 24 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -54y$

PTI CRITICI $\begin{cases} x^3 + 6y = 0 \\ -9y^2 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9}{8}y^2 = \frac{9}{8}\left(-\frac{x^3}{6}\right)^2 = \frac{x^6}{32} \iff x = 0$ oppure $x = 2$

TORNANDO AL SISTEMA TROVO $(0,0)$, $(2, -4/3)$

Calcolo gli Hessiani

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante $<0 \Rightarrow (0,0)$ PTO DI SELLA

$H_f(2, -\frac{4}{3}) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 4 & 24 \\ 24 & -54\frac{(-4)}{3} \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ ha determinante >0 e $a_{11}>0$ $\Rightarrow (2, -\frac{4}{3})$ pto di minimo

(b) $\lim_{y \to \pm\infty} f(0,y) = \lim_{y \to \pm\infty} -9y^3 = -\infty/+\infty \Rightarrow \sup f = +\infty \quad \inf f = -\infty$

(c) Noto che i punti $(x,0)$ con $x \geq 0$ sono in M e che

$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty \Rightarrow \sup_M f = +\infty$ (non $\exists$ max)

Inoltre $f(x,y) \geq x^4 - 9y^3 - 12x^2 - 12y^2$ (perché $xy \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$)

$\geq x^4 - 9x^3 - 12x^2 - 12x^2$ se $(x,y) \in M$

Se $(x,y) \in M = \{0 \le y \le x\}$ e $\|(x,y)\| \to \infty$ necessariamente $x \to +\infty$

da cui $\boxed{\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty}$. Ne segue che $\exists \min_M f$

Dato che in $\mathring{M}$ non ci sono punti critici il punto di minimo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial M$

Noto che $\partial M = \underbrace{\{0 \le y = x\}}_{E_1} \cup \underbrace{\{0 = y \le x\}}_{E_2}$. Su E_2 ho $f(0,x) = x^4 \geq 0$

Su E_1 ho $f(x,x) = x^4 - x^3 + 24x^2$. Se derivo in $x \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x,x) = 4x^3 - 3x^2 + 24x$

che si annulla se $x=0$ o $4x^2-3x+12=0$ ← NON HA SOLUZIONI.

DUNQUE IL MINIMO E' IN $x=0$ e vale 0 (Si poteva anche vedere che $x^4-x^3+24x^2 \geq x^4 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 24x^2 = \frac{x^4}{2} + \frac{47}{2}x^2 \geq 0$)

2. Si considerino il dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ e il campo vettoriale $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 20, x^2 + y^2 + (z-5)^2 \le 25, y \ge x\}, \; \vec{f}(x, y, z) := xy^2e^{2z}(2x\vec{\mathbf{i}}+2y\vec{\mathbf{j}}-5\vec{\mathbf{k}}).$$

(a) D è normale rispetto a z cioè $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in B, g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y)\}$, dove (2p.):

$B = \boxed{\{x^2+y^2 \le 16 \, , \, y \geqslant x\}}$

$g_1(x, y) = \boxed{5 - \sqrt{25-x^2-y^2}}$

$g_2(x, y) = \boxed{\sqrt{20-x^2-y^2}}$

(b) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ uscente da D attraverso ∂D (1p.):

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \boxed{0}$$

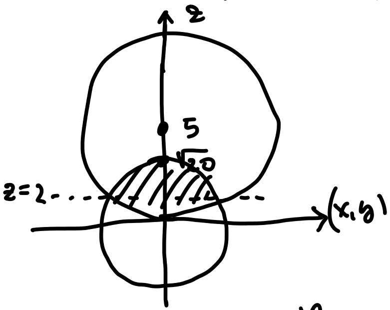
(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie $S := \{(x, y, z) : (x, y) \in B, z = g_2(x, y)\}$ (dove B e g_2 sono definiti nel punto (a)), con normale concorde con $\vec{\mathbf{k}}$ (3p.):

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \boxed{\frac{4^5}{3\sqrt{2}} = -\frac{1024}{3\sqrt{2}}}$$

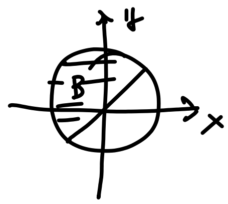
Svolgimento

(a) Le condizioni su D si possono scrivere:

$$-\sqrt{20-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{20-x^2-y^2} \;;\; 5-\sqrt{25-x^2-y^2} \le z \le 5+\sqrt{25-x^2-y^2} \,,\; y \geqslant x$$



$$\Longleftrightarrow \quad 5-\sqrt{25-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{20-x^2-y^2} \qquad y \geqslant x$$



Queste condizioni implicano

$$\left(5-\sqrt{25-x^2-y^2}\right)^2 \le 20-x^2-y^2 \Longleftrightarrow 25+25-x^2-y^2-10\sqrt{25-x^2-y^2} \le 20-x^2-y^2 \Longleftrightarrow$$

$$3 \le \sqrt{25-x^2-y^2} \Longleftrightarrow x^2+y^2 \le 16 \,.$$

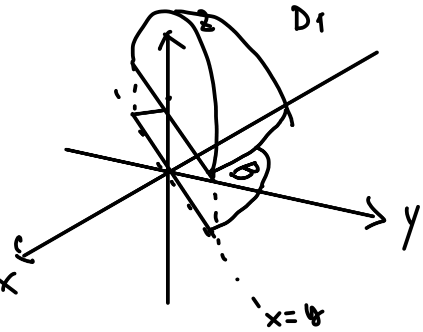
Dunque $B = \{x^2+y^2 \le 16, y \geqslant x\}$, $g_1(x,y) = 5-\sqrt{25-x^2-y^2}$, $g_2(x,y) = \sqrt{20-x^2-y^2}$

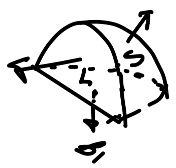
(b) Calcolo la divergenza di $\vec{f}$:

$$2\frac{\partial}{\partial x}x^2y^2e^{2z} + 2\frac{\partial}{\partial y}xy^3e^{2z} - \frac{\partial}{\partial z}5xy^2e^{2z} = 4xy^2e^{2z} + 6xy^2e^{2z} - 10xy^2e^{2z} = 0$$

DUNQUE IL FLUSSO ATTRAVERSO $\partial D = \iiint_D \operatorname{div} \vec{f} = 0$

(c) Conviene introdurre l'insieme $D_1 = \{(x,y)\in B,\ 0\le z\le g_2(x,y)\}$
che ha come bordo $\partial D_1 = B_1\cup L\cup S$ dove
$B_1 = \{(x,y)\in B,\ z=2\}$, $L = \{(x,y)\in \partial B\ \ 0\le z\le g_2\}$.
(B e S sono quelli di prima. Sempre per il teorema della div





si ha $\displaystyle\iint_{\partial D_1} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = 0 \iff$

$$\iint_{B_1} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + \iint_{L} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + \iint_{S} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = 0$$

(su B_1 la normale è $-\vec{k}$, su L la normale è $\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$)

Notiamo che su L si ha $x=y \Rightarrow \vec{f}(x,y,z)\cdot\hat{\nu} = x^3 e^{2z}(2x\vec{i}+2y\vec{j}-5\vec{k})\,\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}} = 0$
dunque il flusso di $\vec{f}$ su L è zero. Su B_1 si ha

$$\iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_{B} \vec{f}(x,y,2)\cdot(-\vec{k})\, dx\,dy = -5e^4 \iint_B xy^2\, dx\,dy = \quad \text{(coord. polari)}$$

$$-5e^4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^4 \rho\cos\theta\, \rho^2 \sin^2\theta\, \rho\, d\rho = -5e^4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta \int_0^4 \rho^4\, d\rho =$$

$$(\sin\theta = t \quad dt = \cos\theta\, d\theta) \quad -5e^4 \int_{\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2} t^2\, dt \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^4 = 5e^4\, 2\int_0^{\sqrt{2}/2} t^2\, dt\, \frac{4^5}{5} =$$

$$2\cdot 4^5 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = 2\cdot 4^5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{3} = \frac{4^5}{3\sqrt{2}}$$

Per differenza il flusso su S è l'opposto del flusso su B_1

3. ($\boxed{}$ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= -3x + \ y + te^{-2t} \\ y' &= -x - y + (1-t)e^{-2t} \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche(1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{-2}, m_A(\lambda_1) = \boxed{2}, m_G(\lambda_1) = \boxed{1}; \lambda_2 = \boxed{}, m_A(\lambda_2) = \boxed{}, m_G(\lambda_2) = \boxed{}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(2p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la matrice esponenziale relativa ad A(1p.):

$$e^{tA} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

(d) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \left(t^2 - \frac{t^3}{3}\right)e^{-2t}$$

$$y(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)e^{-2t}$$

Svolgimento

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = (-3-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$

UNICO AUTOV. $\lambda = -2$ con $m_A = 2$. Pongo $B = A + 2I$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ che ha rango 1 $\Rightarrow m_G = 1 \Rightarrow J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Cerco e_2 con $Be_2 \neq 0$; per esempio $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = Be_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Posso allora prendere $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Allora

$$e^{tA} = M e^{tJ} M^{-1} = M e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}$$

(d) Applicando la formula

$$Y(t) = e^{tA}\Big(\underbrace{Y_0}_{0} + \int_0^t e^{-sA} B(s)\,ds\Big) = \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\,ds =$$

$$\int_0^t e^{2(s-t)} \begin{bmatrix} 1-t+s & t-s \\ s-t & 1+t-s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s e^{-2s} \\ (1-s)e^{-2s}\end{bmatrix} ds = e^{-2t}\int_0^t \begin{bmatrix}1-t+s & t-s\\ s-t & 1+t-s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\1-s\end{bmatrix} ds =$$

$$e^{-2t}\int_0^t \begin{bmatrix} \cancel{s} - ts + s^2 + t - \cancel{s} - ts + s^2 \\ s^2 - ts + 1 + t - s - s - ts + s^2\end{bmatrix} ds = e^{-2t}\int_0^t \begin{bmatrix} t - 2ts + 2s^2 \\ 1+t -2(1+t)s + 2s^2\end{bmatrix} ds =$$

$$e^{-2t}\begin{bmatrix} ts - ts^2 + \frac{2}{3}s^3 \\ (1+t)s - (1+t)s^2 + \frac23 s^3\end{bmatrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t} = e^{-2t}\begin{bmatrix} t^2 - t^3 + \frac23 t^3 \\ (1+t)t - (1+t)t^2 + \frac23 t^3\end{bmatrix} =$$

$$e^{-2t}\begin{bmatrix} t^2 - \frac{t^3}{3} \\ t - \frac{t^3}{3}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= t^2(1-t/3)e^{-2t} = (t^2 - t^3/3)\,e^{-2t}\\ y(t) &= t\,(1-t^2/3)e^{-2t} = (t - t^3/3)\,e^{-2t}\end{aligned}$$

VERIFICA (NON RICHIESTA)

$$x' = (2t - t^2 - 2t^2 + 2t^3/3)\,e^{-2t} = (2t - 3t^2 + \tfrac23 t^3)e^{-2t}$$

$$y' = (1 - t^2 - 2t + 2t^3/3)\,e^{-2t} = (1 - 2t - t^2 + \tfrac23 t^3)e^{-2t}$$

$$x' + 3x\ y = e^{-2t}\big(2t - \cancel{3t^2} + \tfrac23 t^3 + \cancel{3t^2} - t^3 - t + t^3/3\big) = e^{-2t}\,t$$

$$y' + x + y = e^{-2t}\Big(1 - 2t - \cancel{t^2} + \cancel{\tfrac23 t^3} + \cancel{t^2} - \cancel{\tfrac{t^3}{3}} + t - \cancel{\tfrac{t^3}{3}}\Big) = e^{-2t}(1-t)$$

TORNA

Nota: Se ci fosse $-t\,e^{-2t}$ al posto di $t\,e^{-2t}$ nella prima equazione, allora
(ERA IL TESTO ORIGINARIO - POI IL MENO È DIVENTATO ERRONEAMENTE PIÙ :))

$$Y(t) = e^{tA}\Big(\underbrace{Y_0}_{0} + \int_0^t e^{-sA} B(s)\,ds\Big) = \int_0^t e^{(t-s)A} B(s)\,ds =$$

$$\int_0^t e^{2(s-t)} \begin{bmatrix} 1-t+s & t-s \\ s-t & 1+t-s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -s e^{-2s} \\ (1-s)e^{-2s}\end{bmatrix} ds = e^{-2t}\int_0^t \begin{bmatrix}1-t+s & t-s\\ s-t & 1+t-s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-s\\1-s\end{bmatrix} ds =$$

$$e^{-2t}\int_0^t \begin{bmatrix} -s + \cancel{ts} - \cancel{s^2} + t - s - \cancel{st} + \cancel{s^2} \\ -\cancel{s^2} + \cancel{ts} + 1 + t - s - s - \cancel{st} + \cancel{s^2}\end{bmatrix} ds = e^{-2t}\int_0^t \begin{bmatrix} t - 2s \\ 1 + t - 2s\end{bmatrix} ds = e^{-2t}\begin{bmatrix} ts - s^2 \\ s + ts - s^2\end{bmatrix}\Bigg|_{s=0}^{s=t}$$

$$= e^{-2t}\begin{bmatrix} t^2 - t^2 \\ t + t^2 - t^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t\,e^{-2t}\end{bmatrix}$$

4. Si consideri la seguente serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}.$$

(a) Si trovino il raggio di convergenza R di f (1p.) e si trovi, se esiste, la derivata seconda di f in $x = 0$ (1p.)

$$R = \boxed{1}, \qquad f''(0) = \boxed{2/5}.$$

(b) Usando i teoremi sulle serie di potenze si trovi l'espressione esplicita di $3f(x) + xf'(x)$ (2p.)

$$3f(x) + xf'(x) = \boxed{\frac{1}{1-x}} \qquad (-R < x < R)$$

(c) Usando il punto precedente si provi (2p.) che

$$f(x) = -\frac{2\ln(1-x) + 2x + x^2}{2x^3} \qquad (-R < x < R)$$

Svolgimento

(a) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+3}} = 1 \Rightarrow R = 1$

Se $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow f''(0) = 2a_2$. Nel nostro caso

$f''(0) = 2\frac{1}{2+3} = \frac{2}{5}$

(b) Derivando per serie: $f'(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{n x^{n-1}}{n+3} \Rightarrow x f'(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{n x^n}{n+3}$

Allora $3f(x) + xf'(x) = \sum_0^\infty \left(\frac{3x^n}{n+3} + \frac{nx^n}{n+3}\right) = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$

(c). La (b) mi dà $f' = -\frac{3}{x}f + \frac{1}{x(1-x)}$ (se $x \neq 0$)

Posso risolvere l'eq. diff. (LINEARE I° ORDINE)

$f(x) = \frac{1}{x^3}\left(f(1) - \int_1^x \frac{s^3}{s(s-1)}ds\right) = \frac{1}{x^3}\left(f(1) - \int_1^x \frac{s^2}{s-1}ds\right) = \frac{1}{x^3}\left(f(1) - \int_1^x \left(s-1+\frac{1}{s-1}\right)ds\right)$

$= \frac{1}{x^3}\left(f(1) - \left[\frac{s^2}{2} + s + \ln|s-1|\right]^x\right) = \frac{1}{x^3}\Big(\underbrace{-\frac{x^2}{2} - x - \ln(1-x) + f(1) - \frac{3}{2}}_{(*)}\Big)$ $(|x|<1,\ x\neq 0)$

Dato che $f(x)$ è definita anche in $x=0$ (e vale $\frac{1}{3}$) deve essere per forza

$\lim_{x\to 0} (*) = 0 \iff f(1) - \frac{3}{2} = 0$. Dunque

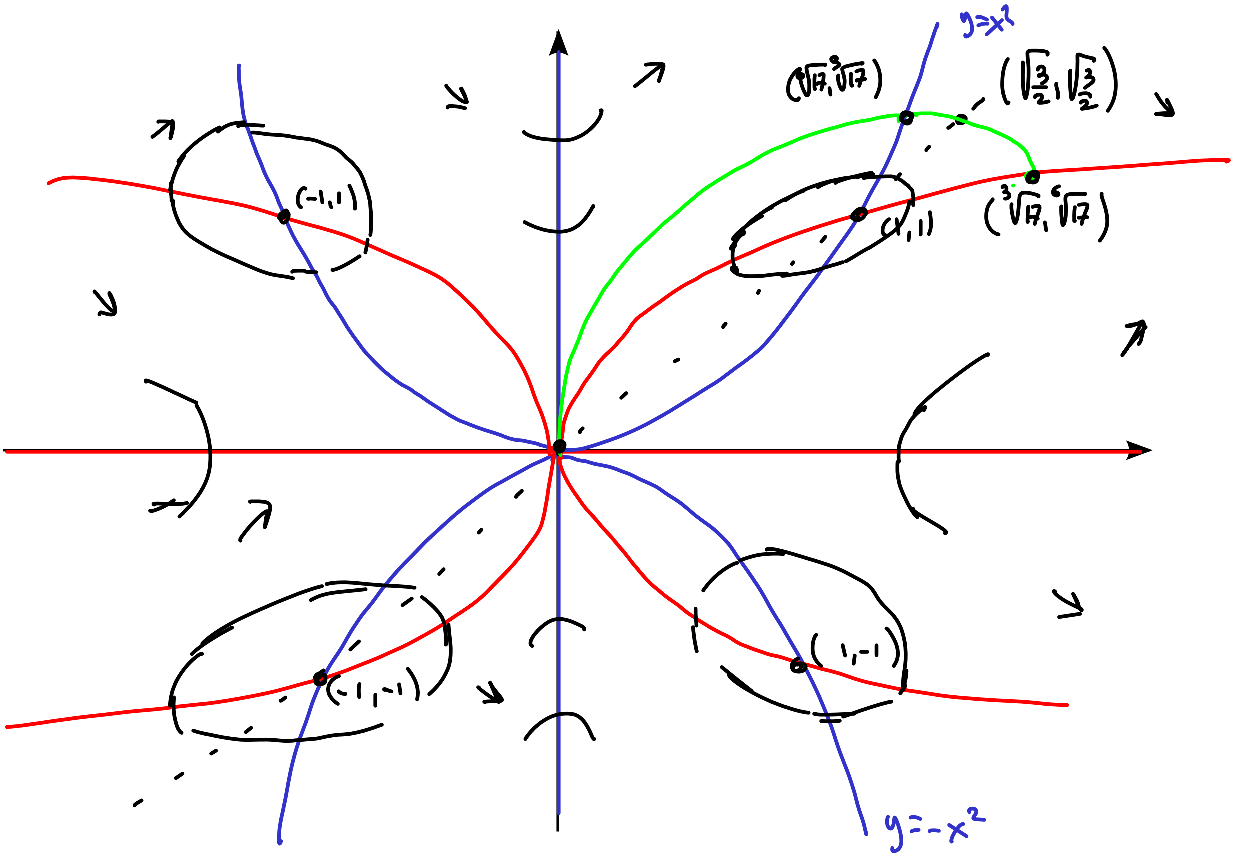
$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}$ (come affermato)

Variante esercizio 3 della seconda parte: solo gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{x(x^4 - y^2)}{y(x^2 - y^4)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovi un integrale primo per l'equazione Φ (3p.).

$$\Phi(x, y) = \boxed{x^6 + y^6 - 3x^2y^2}$$

3. Si disegni nel diagramma della pagina precedente la soluzione $y(x)$ tale che $y(\sqrt{3/2}) = \sqrt{3/2}$ (1p.); detto $]\underline{x}, \overline{x}[$ l'intervallo massimale su cui tale y è definita si ha (1p.):

$\underline{x} = \boxed{}$ $\qquad$ $\overline{x} = \boxed{}$

Svolgimento

(2) Cerco un integrale primo $\phi(x,y)$ imponendo le condizioni

$$(i)\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = x^5 - x y^2 \qquad (ii)\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y^5 - x^2 y$$

da (i) ottengo $\phi(x,y) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2 y^2}{2} + c(y)$. Se derivo ϕ in $y \Rightarrow$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -x^2 y + c'(y)$ che, a causa di (ii), deve fare $y^5 - x^2 y$. Dunque

$c'(y) = y^5 \Leftrightarrow c(y) = \frac{y^6}{6} + c$. IN DEFINITIVA

$$\phi(x,y) = \frac{x^6}{6} + \frac{y^6}{6} - \frac{x^2 y^2}{2} + c$$

VOLENDO posso considerare $\phi_1 = 6\phi = x^6 + y^6 - 3x^2 y^2$

(ϕ è costante $\Leftrightarrow$ ϕ_1 è costante)

(3) Se parto da $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2})$ ho $\phi(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\,\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} =$

$2 \cdot \frac{3^3}{2^3} - \frac{3^3}{2^2} = 0$. Dunque sulla traiettoria che parte da $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

deve avere $\phi(x, y(x)) = 0$

$$\begin{cases} \frac{x^6}{6} + \frac{y^6}{6} - 3x^2 y^2 = 0 \\ x^2 = y^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^{12}}{6} + \frac{y^6}{6} - 3y^6 = 0$$

$\frac{y^6}{6} + \frac{1}{6} - 3 = 0 \qquad y^6 = 18 - 1$

$y = \pm\sqrt[6]{17}$

$x = y^3$

$\sqrt[6]{17} > \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \sqrt[3]{17} > \frac{3}{2}$

$17 > \frac{27}{8}$ $\boxed{\text{SI}}$

$y^2 = x^4$

$x = \sqrt[6]{17}$