COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 30 giugno 2018 - PARTE A

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da: $f(x, y) = (2x - 3y, x^2y^3)$. Allora f è invertibile in un intorno del punto $(1, 1)$. Perché? (2p.)

Calcolo $J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ che ha det $= 12 \neq 0$

Per il th. di inversione locale vale l'affermazione

2. Si consideri la seguente serie trigonometrica $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n^4 - 3} \cos(2nt)$. Allora f è derivabile. Perchè? (2p.)

La serie è del tipo $\sum_0^\infty a_n \cos(\omega n t)$. Per avere C^1 basta $\sum_0^\infty n|a_n| < +\infty$

cioè $\sum_0^\infty \frac{2n^2}{n^4-3} < +\infty$. Dato che $\frac{2n^2}{n^4-3} \simeq \frac{2}{n^2}$ e $\sum_0^\infty \frac{2}{n^2} < +\infty$

VALE LA TESI

3. Si calcoli la lunghezza del grafico della funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \cosh(x)$ (2p.)

Devo calcolare $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\sinh^2(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2(x)}\,dx =$

$\int_{-1}^{1} \cosh(x)\,dx = \left[\sinh(x)\right]_{-1}^{1} = 2\sinh(1) = 2\,\frac{e^{1}+e^{-1}}{2} = e+\frac{1}{e} = \frac{e^2+1}{e}$

4. Si dica se il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x,y) := \dfrac{x}{x^2+y^4}\vec{\mathbf{i}} + \dfrac{2y}{x^2+y^4}\vec{\mathbf{j}}$ è conservativo (2p.)

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^4} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^4)^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{x^2+y^4} = \frac{-4xy}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \neq \frac{\partial f_2}{\partial x} \Rightarrow \text{NON CONSERVATIVO}$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

   (a) Siano Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^N$ e $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un campo di classe $\mathcal{C}^1$. Allora $\vec{f}$ è irrotazionale se e solo se $\vec{f}$ è conservativo. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. (Ω convesso $\Rightarrow$ Ω semp. conn.)

   (b) Se $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è differenziabile e se $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$, allora f è costante in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è connesso)

   (c) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e se esiste $f'(0)(\vec{v})$ per ogni $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^2$, allora f è continua in zero. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$.

   (d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, +\infty]$ è una funzione integrabile sul disco $B := \{x^2 + y^2 < 1\}$, allora $|f|$ è integrabile su B. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. (è la def. di integrabilità secondo Lebesgue quando f non è $\geq$)

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 30 giugno 2018 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := 4x^3 + 3y^4 - 12xy$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

   $(x, y) =$ (0,0) punto di SELLA $(x, y) =$ (1,1) punto di MINIMO

   $(x, y) =$ ______ punto di ______ $(x, y) =$ ______ punto di ______

   (b) Si dica se (1p.)

   f è limitato superiormente [SI] ~~[NO]~~, f è limitato inferiormente [SI] ~~[NO]~~.

   (c) Posto $Q := \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, si dica se f ha massimo/minimo su Q e in caso affermativo si calcolino tali valori (2p.):

   $\min_Q f =$ -5 [non esiste] / $\max_Q f =$ ______ ~~[non esiste]~~

Svolgimento

· $\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 12y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 - 12x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36y^2$

· PTI STAZ.: TROVO IL SISTEMA

$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow y = (y^3)^2 \Leftrightarrow y = y^6 \Leftrightarrow y=0 \,/\, y^5=1 \Leftrightarrow y=0 \,/\, y=1$

Metto i valori di y nella seconda riga $\Rightarrow (0,0) \,/\, (1,1)$

· Calcolo gli hessiani

se $P=(0,0)$ $\quad Hf(P) = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det < 0 \Rightarrow$ SELLA

se $P=(1,1)$ $\quad Hf(P) = \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 36 \end{bmatrix}$ $\quad \det > 0 \quad a_{11} > 0 \Rightarrow$ MINIMO

· Se faccio $\lim_{x \to +\infty/-\infty} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty/-\infty} 4x^3 = +\infty / -\infty$

vedo che f non è limitato sup/inf.

· Noto che $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow f(x,y) \geq \underbrace{\left(4x^3 - \frac{x^2}{2}\right)}_{g(x)} + \underbrace{\left(y^4 - \frac{y^2}{2}\right)}_{h(y)}$

e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{y \to +\infty} h(y) = +\infty$.

Se ora $\|(x_n, y_n)\| \to \infty$ con $(x_n, y_n) \in Q$ almeno uno tra (x_n) e (y_n)

Tende a $+\infty$ e quindi $f(x_n, y_n) \to +\infty$

DUNQUE $\lim_{\substack{\|(x,y)\| \to +\infty \\ (x,y) \in Q}} f(x,y) = +\infty$ da cui f HA MINIMO / NON HA MAX.

- Se P_0 = punto di minimo per f su Q ci sono due possibilità:

(a) $P_0 \in \mathring{Q}$ $\Rightarrow$ P_0 è stazionario per f $\Rightarrow P_0 = (1,1) \Rightarrow f(P_0) = -5$

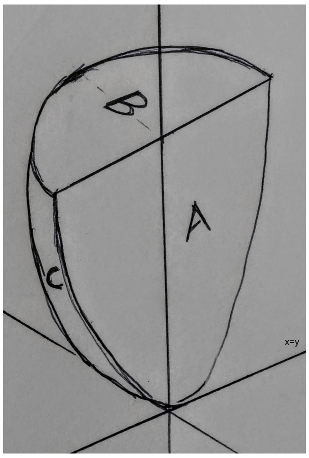
(b) $P_0 \in \partial Q$ cioè $P_0 = (x,0)$ oppure $(0,y)$. MA

$f(x,0) = 4x^3 \geq 0$ e $f(0,y) = 3y^4 \geq 0$ per cui $f(x,y) \geq 0$ su ∂Q

IN DEFINITIVA $P_0 = (1,1)$ e $f(P_0) = -5$

2. Si considerino il dominio D definito e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$D := \{(x,y,x)\ : 4 \geq z \geq x^2+y^2, x \geq y\}\,, \quad \vec{f}(x,y,z) := x^3 z\vec{\mathbf{i}} + y^3 z\vec{\mathbf{j}} - (x^2+y^2)z^2\vec{\mathbf{k}}.$$



(a) Dando per buono che l'immagine sopra rappresenta D si trovi una descrizione matematica delle tre superfici A, B e C che compongono ∂D (1,5p.).

$A =$ $\{x = y,\ 2x^2 \leq z \leq 4\}$

$B =$ $\{z = 4\ ,\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq y\}$

$C =$ $\{z = x^2+y^2\ ,\ x \geq y,\ z \leq 4\}$

(b) Si trovino i flussi di $\vec{f}$ attraverso i tre insiemi indicati sopra, prendendo su ognuno di essi la normale uscente da D (4,5p.).

$\Phi(\vec{f}, A) =$ 0

$\Phi(\vec{f}, B) =$ -64π

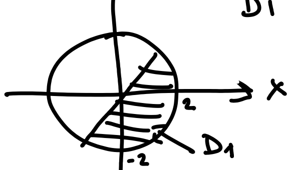
$\Phi(\vec{f}, C) =$ 80π

Svolgimento

(a) è standard

(b) Voglio usare il teor. della divergenza. Si ha $\operatorname{div}\vec{f} = (x^2+y^2)z$. Allora

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy\,dz = \iiint_D (x^2+y^2)z\, dx\,dy\,dz = \iint_{D_1}(x^2+y^2)\,dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{4} z\,dz =$$

(dove $D_1 = \{(x,y):\ x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq y\}$ 

) =

$$\iint_{D_1}(x^2+y^2)\left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^{4} dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{D_1}(x^2+y^2)\left(16-(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy = \quad \text{(coord. polari)}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\pi/4} d\theta \int_0^2 \rho^2(16-\rho^4)\rho\, d\rho = \frac{1}{2}\pi\ \frac{1}{2}\int_0^4 s(16-s^2)\, ds = \frac{\pi}{4}\left[16\frac{s^2}{2}-\frac{s^4}{4}\right]_0^4 =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(8\cdot 4^2-\frac{4^4}{4}\right) = \pi\left(8\cdot 4 - 4^2\right) = 16\pi$$

- $\Phi(\vec{f},A) = \iint_{\{x=y,\ 2x^2\le z\le 4\}} \vec{f}(x,x,z)\cdot\hat{\nu}\, dx\, dz$ dove $\hat{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\{x=y,2x^2\le z\le 4\}} \left(f_1(x,x,z)-f_2(x,x,z)\right)dx\, dz = 0 \quad (\text{INTEGRANDO} = 0)$$

- $\Phi(f,B) = \iint_{D_1} f_3(x,y,4)\, dx\, dy = -\iint_{D_1}(x^2+y^2)\cdot 16\, dx\, dy$ $(\hat{\nu}=\vec{k})$ (D1 è quello di primo

$$-16\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\pi/4} d\theta\int_0^2 \rho^2\rho\, d\rho = -16\pi\left[\rho^4/4\right]_0^2 = -64\pi$$

- Dato che $\Phi(\vec{f},\partial D) = \Phi(\vec{f},A)+\Phi(f,B)+\Phi(f,C)$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{f},C) = \Phi(\vec{f},\partial D)-\Phi(f,B) = 16\pi + 64\pi = 80\pi$$

3. $\left(\boxed{} \text{ al posto di questo esercizio svolgo quello alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16} \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' &= x + y + 1 \\ y' &= -x + 3y + t \end{cases}$$

Chiamiamo A la matrice associata al sistema.

(a) Si trovino gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche(1p.):

$$\lambda_1 = \boxed{2}, m_A(\lambda_1) = \boxed{2}, m_G(\lambda_1) = \boxed{1}; \lambda_2 = \boxed{}, m_A(\lambda_2) = \boxed{}, m_G(\lambda_2) = \boxed{}.$$

(b) Si trovi una base di autovettori generalizzati per Ae la relativa forma di Jordan(2p.):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{0} & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

(c) Si scriva la matrice esponenziale relativa ad A(1p.):

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} \boxed{1-t} & \boxed{t} \\ \boxed{-t} & \boxed{1+t} \end{pmatrix}$$

(d) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. (2p.)

$$x(t) = \boxed{\frac{1}{4}(2-t)e^{2t} + \frac{1}{4}(t-2)}$$

$$y(t) = \boxed{\frac{1}{4}(1-t)e^{2t} - \frac{1}{4}(t+1)}$$

Svolgimento

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ • $p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)+1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$

$\Rightarrow$ radice $\lambda = 2$ doppia

- $B := A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ rango 1 Ker di dimensione 1 $\Rightarrow m_G = 1$

Un elemento e_2 tale che $Be_2 \neq 0$ è per esempio $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = Be_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dunque se $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ si ha $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = MJM^{-1}$

con $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Allora $e^{tJ} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$$e^{tA}= M e^{tJ} M^{-1}= e^{2t} M \begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -1 & 1\end{bmatrix}= e^{2t}\begin{bmatrix}1-t & t\\ -t & 1+t\end{bmatrix}$$

· Se $B(t)=\begin{bmatrix}1\\ t\end{bmatrix}$ $\quad Y_0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad Y(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ abbiamo la formula:

$$Y(t) = \int_0^t e^{(t-s)} B(s)\,ds \underset{t-s=\sigma}{=} \int_0^t e^{\sigma} B(t-\sigma)\,d\sigma = \int_0^t e^{2\sigma}\begin{bmatrix}1-\sigma & \sigma\\ -\sigma & 1+\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ t-\sigma\end{bmatrix} d\sigma$$

$$\int_0^t e^{2\sigma}\begin{bmatrix}1-\sigma+\sigma t-\sigma^2\\ -\sigma+t+t\sigma-\sigma-\sigma^2\end{bmatrix} d\sigma = \int_0^t e^{2\sigma}\begin{bmatrix}1+(t-1)\sigma-\sigma^2\\ t+(t-2)\sigma-\sigma^2\end{bmatrix} d\sigma$$

$$\int_0^t e^{2\sigma}\,d\sigma = \left[\frac{e^{2\sigma}}{2}\right]_0^t = \boxed{\frac{e^{2t}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^t \sigma e^{2\sigma}\,d\sigma = \left[\sigma\frac{e^{2\sigma}}{2}\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t e^{2\sigma}\,d\sigma = \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{e^{2t}}{4}+\frac{1}{4} = \boxed{\frac{2t-1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^t \sigma^2 e^{2\sigma} = \left[\sigma^2\frac{e^{2\sigma}}{2}\right]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t 2\sigma e^{2\sigma}\,d\sigma = \frac{t^2}{2}e^{2t} - \frac{2t-1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{2t^2-2t+1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow Y(t) = \begin{bmatrix}\frac{e^{2t}}{2}-\frac{1}{2} + (t-1)\left(\frac{2t-1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\right) - \frac{2t^2-2t+1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}\\ t\left(\frac{e^{2t}}{2}-\frac{1}{2}\right) + (t-2)\left(\frac{2t-1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\right) - \frac{2t^2-2t+1}{4} + \frac{1}{4}\end{bmatrix} =$$

$$\frac{e^{2t}}{4}\begin{bmatrix}2+(t-1)(2t-1) - 2t^2+2t-1\\ 2t+(t-2)(2t-1) - 2t^2+2t-1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2+(t-1)+1\\ -2t+(t-2)+1\end{bmatrix} =$$

$$\frac{e^{2t}}{4}\begin{bmatrix}2+\cancel{2t^2}-t-\cancel{2t}\cancel{+1}-\cancel{2t^2}+\cancel{2t}\cancel{-1}\\ \cancel{2t}+\cancel{2t^2}-t-\cancel{4t}+2-\cancel{2t^2}+\cancel{2t}-1\end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2+t\\ -1-t\end{bmatrix} =$$

$$\frac{e^{2t}}{4}\begin{bmatrix}2-t\\ 1-t\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2-t\\ 1+t\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}(2-t)e^{2t} + (t-2)\\ (1-t)e^{2t} - 1 - t\end{bmatrix}$$

4. Si consideri l'equazione differenziale
$$xy'' - 3y' - y = x^2$$

Si cerchino le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ mediante una serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Si risponda in particolare ai sequenti quesiti.

(a) Si scriva una formula ricorsiva per i coefficienti a_n (2p.)

$a_{n+1}(n+1)(n-3) = a_n + \delta_{n,2}$ dove $\delta_{n,2} = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ 1 & n = 2 \end{cases}$ OPPURE

$a_0 = -12$, $a_1 = 4$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $a_4 \in \mathbb{R}$ (libero)

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(n-3)}$ per $n \geq 4$

($\mathcal{R}$)

(b) Si dica se esiste una soluzione y con $y'''(0) = 0$ (1p.) ~~SI~~ NO e in caso affermativo se tale y è unica (1p.) SI ~~NO~~.

(c) Si mostri che esiste un'unica soluzione y con $y''''(0) = 0$, si dica qual è il suo raggio di convergenza: $R = \boxed{+\infty}$ (1p.) e quanto fa $y(0) = \boxed{-12}$ (1p.).

Svolgimento

$y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n \Rightarrow$

$y''(x) = \sum_{1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^{n-1} \Rightarrow x y''(x) = \sum_{1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n$.

IMPONGO L'EQ. $\Rightarrow$

$$x^2 = \sum_{0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1)n - 3a_{n+1}(n+1) - a_n \right) x^n = \sum_{0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n+1)(n-3) - a_n \right) x^n$$

Dato che $x^2 = \sum_{0}^{\infty} \delta_{n,2} x^n$ con $\delta_{n,2} = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ 1 & n = 2 \end{cases}$ OTTENGO

$$a_{n+1}(n+1)(n-3) - a_n = \delta_{n,2} \qquad (\mathcal{R})$$

POSSO FARE MEGLIO

se $n = 3 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$. Se $n = 2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -1}$ (uso $\delta_{2,2} = 1$!!). Se $n = 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 4}$

Se $n = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = -12}$. Se $n \geq 4$ posso scrivere $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(n-3)}$

- Noto che TUTTE LE SOL. VERIFICANO $a_3 = 0$ e che per altro se fisso $a_4 \in \mathbb{R}$ trovo tutti gli a_n con $n \geq 4$ e la serie ha raggio $+\infty$ dato che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ (se esiste) } = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n-3)} \text{ (per } \mathcal{R}) = 0$$

In definitiva per ogni $a_4 \in \mathbb{R}$ ho una soluzione, MA TUTTE HANNO $y'''(0) = 0$

- Se prendo $y''''(0) = 0$ ho $a_4 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 4$ e dunque

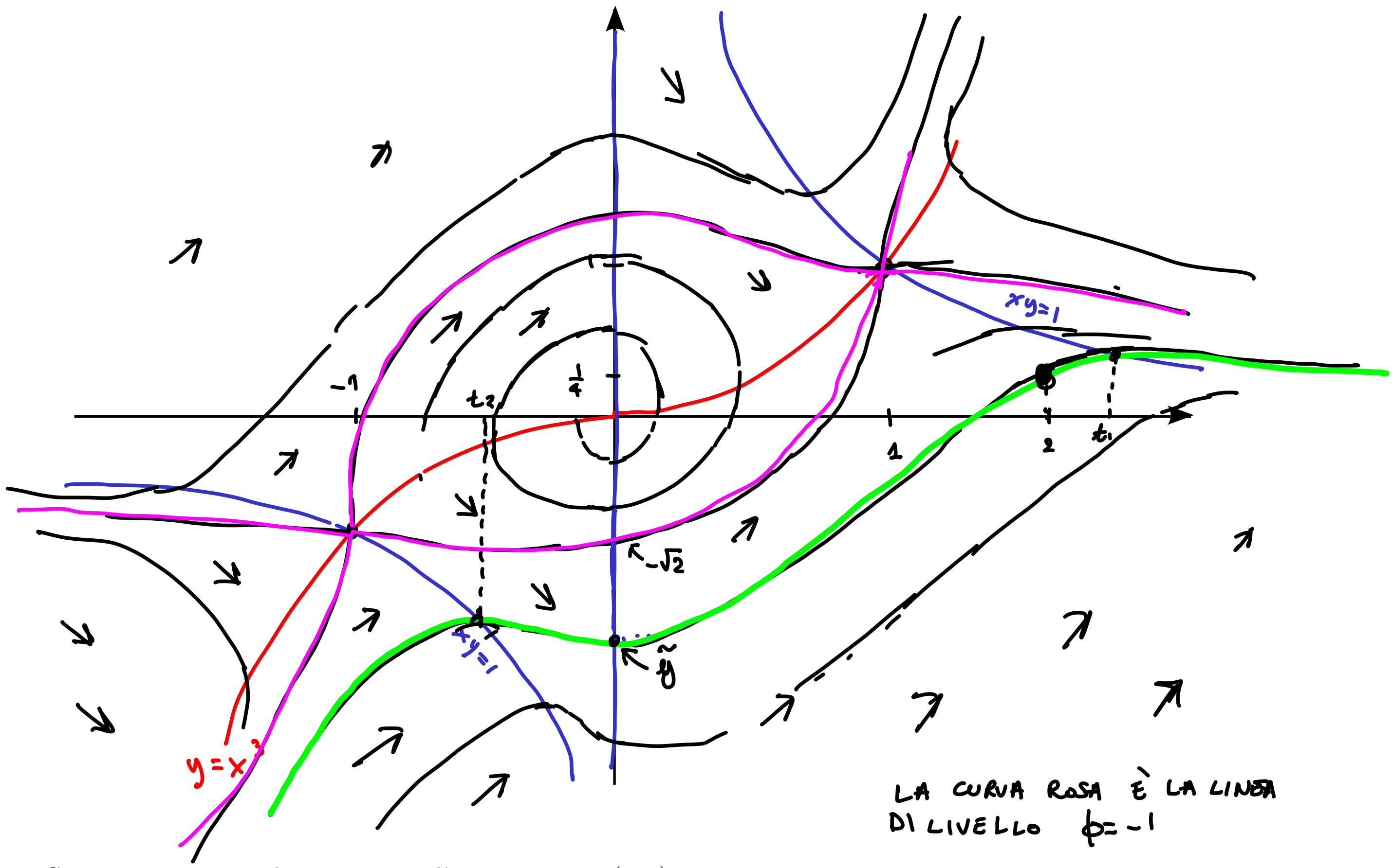
$y(x) = -12 + 4x - x^2$ che in zero vale -12

Variante esercizio 3 della seconda parte: solo gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{3x(xy-1)}{y-x^3}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovi un integrale primo per l'equazione Φ (3p.).

$\Phi(x, y) =$ $\boxed{x^3y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2}$

3. Si disegni nel diagramma della pagina precedente la soluzione $y(x)$ tale che $y(2) = 1/4$ (1p.); detto $]\underline{x}, \overline{x}[$ l'intervallo massimale su cui tale y è definita si ha (1p.):

$\underline{x} = \boxed{-\infty}$ $\qquad$ $\overline{x} = \boxed{+\infty}$

Svolgimento

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2y - 3x \Rightarrow \phi(x,y) = x^3y - \frac{3}{2}x^2 + c(y)$$

$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^3 + c'(y)$ che deve essere uguale a $x^3 - y \Rightarrow c(y) = -\frac{y^2}{2} + c$

DUNQUE $\phi(x,y) = x^3y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 +$ costante

(3) Se si parte dal punto $(2, 1/4)$ la soluzione $y(x)$ PARTE CRESCENDO.
se t cresce $y(t)$ incontra la curva blu $(xy=1)$ in un punto $t_1 > 2$ in cui $y'(t_1)=0$. Se $x > t_1$ $y(t)$ decresce e non può più incontrare la curva blu $\Rightarrow$ $y(t)$ esiste per tutti i $t \geq t_1$

(SI POTREBBE MOSTRARE – USANDO ϕ – che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$)

se invece $t < 2$ $y(t)$ rimane crescente fino a $t=0$ in cui $y'=0$

Notiamo che la "curva inferiore rossa" che esce da $(-1,-1)$ va a finire in $(1,1)$ dato che $\phi(-1,-1) = \phi(1,1) = -1$ e passa da zero per $y = \bar{y}$ tale che $\phi(0,\bar{y}) = -1$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{\bar{y}^2}{2} = -1$ $\Leftrightarrow$ $\bar{y} = -\sqrt{2}$.

Se guardo la $y(x)$ che parte da $(2, 1/4)$ vedo che
$\phi(2, 1/4) = \frac{8}{4} - \frac{3}{2}4 - \frac{1}{2}\frac{1}{16} = 2 - 6 - \frac{1}{32} = -4 - \frac{1}{32}$. Allora tale $y(x)$

attraversa l'asse y in un punto $\tilde{y} < 0$ con $\phi(0,\tilde{y}) = -4 - \frac{1}{32}$ $\Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\tilde{y}^2 = 4 + \frac{1}{32}$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{y}^2 = 8 + \frac{1}{16} > 2$. IN SOSTANZA $\tilde{y} < -\sqrt{2}$

NE SEGUE CHE $y(x)$ è sempre sotto la curva rossa $\Rightarrow$ incrocia la curva blu in un punto $t_2 < 0$ con $y'(t_2) = 0$. Per $t < t_2$

la $y(x)$ è crescente e non può mai incontrare la curva rossa.
Allora può (i) Divergere a $-\infty$ per un $t_3 < t_2$
(ii) Esistere $\forall t < t_2$ (e tendere a $-\infty$ per $t \to -\infty$)

Se fossimo nel caso (i) avremmo

$$-2 - \frac{1}{32} = \lim_{x\to \bar{t}^+} \phi(x, y(x)) = \lim_{\substack{x \to \bar{t}^- \\ y \to -\infty}} \underbrace{\left(x^3 - \frac{y}{2}\right)}_{+\infty} \underbrace{y}_{-\infty} - \frac{3}{2}x^2 = -\infty$$ ASSURDO

DUNQUE VALE (ii) e alla fine $y(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$