COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino D -1 giugno 2018 - PARTE A

1. Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^2$ e sia $\Gamma : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$. Indicare le condizioni su Γ che fanno sì che $S := \Gamma(\Omega)$ sia una superficie parametrica (3p.).

Deve essere

- Γ continua in $\bar{\Omega}$ e C^1 su Ω
- Γ iniettiva
- $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u}(u_0,v_0) \otimes \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v}(u_0,v_0) \neq 0$ per ogni $(u_0,v_0) \in \Omega$

$\left(\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u}\right.$ e $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial v}$ linearmente indipendenti$\left.\right)$

2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e sia $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$. Per ognuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera o falsa (1p. ciascuna)

   (a) Se $\vec{f}$ ha integrale di linea nullo su ogni curva chiusa di Ω, allora $\vec{f}$ è conservativo. $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

   (b) Se $\mathrm{div}(f) = 0$, allora $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore. $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$

   (c) Se $\vec{f}$ è solenoidale allora $\mathrm{rot}(\vec{f}) = 0$. $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$

   (d) Se le $\mathrm{rot}(\vec{f}) = 0$, allora $\vec{f}$ è costante. $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$

3. Siano S_1 e S_2 sono due superfici orientabili, con versori normali $\hat{\nu}_1$ e $\hat{\nu}_2$ rispettivamente. Supponiamo che $\Sigma(S_1) = \Sigma(S_2) = \Sigma$ e che le due normali $\hat{\nu}_1$ e $\hat{\nu}_2$ inducano lo stesso verso su Σ.

   Allora per ogni campo $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1$ si ha:

$$\iint_{S_1} \mathrm{rot}(\vec{f}) \cdot \hat{\nu}_1 \, d\sigma = \iint_{S_2} \mathrm{rot}(\vec{f}) \cdot \hat{\nu}_2 \, d\sigma \qquad \boxed{\cancel{\text{SI}}} \ \boxed{\text{NO}}.$$

   Si fornisca una motivazione (concisa) della risposta (3p.)

$$\iint_{S_1} \mathrm{rot}(\vec{f}) \cdot \hat{\nu}_1 \, d\sigma \underset{\uparrow \text{ STOKES}}{=} \iint_{\Sigma(S_1)} \vec{f} \cdot d\vec{s} \underset{\uparrow \text{ IPOTESI}}{=} \iint_{\Sigma(S_2)} \vec{f} \cdot d\vec{s} \underset{\nwarrow \text{ STOKES}}{=} \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \hat{\nu}_2 \, d\sigma$$

4. Si mostri che, se $\Omega = \{(x,y); y>0\} \subset \mathbb{R}^2$, il campo $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x,y) := \dfrac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}$ è conservativo in Ω (3p.). È anche conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ (2p.)?

Il modo più semplice è trovare un potenziale F

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow F(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c(y)$$

allora $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c'(y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} + c'(y)$

da cui $c'=0$. In definitivo esiste un potenziale

$F(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ (+ costante) che È DEFINITO $\forall (x,y) \neq (0,0)$

Questo implica che $\vec{f}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(e quindi su Ω).

se non si fa così si può vedere che $\vec{f}$ è conservativo su Ω mostrando che $\vec{f}$ è irrotazionale:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x^2+y^2}$$

e notando che Ω è CONVESSO $\Rightarrow \Omega$ semplicemente connesso.

Questo ragionamento NON DICE NULLA riguardo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (per questo bisogna fare il discorso dell'inizio). NON È INFATTI VERO CHE

Ω NON SEMPL. CONN. $\Rightarrow$ $\vec{f}$ NON CONSERVATIVO

Ingegneria Aerospaziale, Compitino D -1 giugno 2018 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri
$$S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 - y^2 - z = 0\}.$$

(a) Si provi che S è una superficie parametrica regolare trovando una parametrizzazione (1p.):

$\Gamma(u, v) = \boxed{(u, v, u^2 - v^2)}$ $(u, v) \in \boxed{\{u^2 + v^2 \leq 1\}}$

(b) Con la parametrizzazione indicata in (a) si trovi il vettore normale (1p):

$\vec{N}(u, v) = \Gamma_u(u, v) \otimes \Gamma_v(u, v) = \boxed{-2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}}$

(c) Si trovi il bordo di S (1p.):

$\Sigma(S) = \boxed{\{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - y^2\}}$

(d) Si trovi una curva γ che percorre $\Sigma(S)$ coerentemente con $\vec{N}$ (1p.):

$\gamma(t) = \boxed{(\cos\theta, \sin\theta, \cos(2\theta))}$ $t \in \boxed{[0, 2\pi]}$

(e) Si calcoli l'area di S (4p.):

$A(S) = \boxed{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)}$

Svolgimento

S è grafico $z = g(x,y)$ dove $g(x,y) = x^2 - y^2$ su $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

da cui (a) e (b)

Il bordo di $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$ è $\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ che è descritto da

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $t \in [0, 2\pi]$ Allora

$\Sigma(S) = \Gamma(\partial\Omega) = \{(x, y, z) : (x, y) \in S, z = x^2 - y^2\} = \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - y^2\}$

che è descritto da $\tilde{\gamma}(t) = \Gamma(\gamma(t)) = (\cos(t), \sin(t), \cos^2(t) - \sin^2(t))$

(e) $A(S) = \iint_\Omega \vec{N}(u,v)\, du\, dv = \iint_{\{u^2+v^2 \leq 1\}} \sqrt{1 + (2u)^2 + (-2v)^2} = \iint_{\{u^2+v^2\}} \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)}\, du\, dv$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4s}\, ds = \pi\left[(1 + 4s)^{3/2} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{3/2} - 1\right)$

2. Si consideri il dominio D e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0\}$$
$$\vec{f}(x,y,z) := (x^3-3x)y^2z^2\vec{\mathbf{i}} + xze^{xz}\vec{\mathbf{j}} - x^2y^2z^3\vec{\mathbf{k}}$$

(a) Si descriva la frontiera di D (1p.):

$$\partial D = \boxed{\{x^2+y^2+z^2=1, x \geq 0\} \cup \{y^2+z^2 \leq 1, x=0\}}$$

(b) Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ su ∂D (5p.):

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \boxed{-\frac{2}{35}\pi}$$

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la superficie $S := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0\}$ orientata con la normale $\tilde{\nu}$ che punta verso l'origine(2p.):

$$\iint_S \vec{f}\cdot\tilde{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{2}{35}\pi}$$

(d) Si dica se $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore(1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$.

Svolgimento

(a) $\partial D = \underbrace{\{x^2+y^2+z^2=1,\ 0 \leq x\}}_{S} \cup \underbrace{\{y^2+z^2 \leq 1 \quad x=0\}}_{B_0}$

(b) Calcolo div $\vec{f} = (3x^2-3)y^2z^2 + -3x^2y^2z^2 = -3y^2z^2$

(VEDI DOPO)

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_D (-3y^2z^2)\,dx\,dy\,dz \overset{\otimes}{=} \int_0^1 dx \iint_{\{y^2+z^2 \leq 1-x^2\}} -3y^2z^2\,dy\,dz =$$

$$-3\int_0^1 dx \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta}_{=\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \rho^5\,d\rho = -\frac{3}{4}\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-3x^2+3x^4-x^6)\,dx =$$

$$-\frac{\pi}{2}\left[x - x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}\left(1-1+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) = -\frac{2\pi}{35}$$

(c) S è una delle due componenti di ∂D. Però la normale messa su S è entrante in D. Dunque

$$-2\frac{\pi}{35} = -\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_{B_0} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma.$$ (su B_0 la normale è $-\vec{k}$)

Si ha $\iint_{B_0} \vec f\cdot\vec\nu\, d\sigma = \iint_{\{y^2+z^2\le1\}} f_1(0,y,z)\,dy\,dz = 0$ perchè $f_1(0,y,z)=0$

$$\Rightarrow \iint_\Omega \vec f\cdot\hat\nu\,d\sigma = \frac{2}{35}\pi$$

(d) Dato che div $\vec f \neq 0$ $\vec f$ non ammette potenziale vettore

(*) Altri modi di fare l'integrale.

$-3\iiint_D y^2z^2\,dx\,dy\,dz$ (integro prima in x) =

$$-3\iint_{\{y^2+z^2\le1\}} y^2z^2\sqrt{1-y^2-z^2}\,dy\,dz = -3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 \rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\sin^2\theta\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$-3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^5\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = -\frac34\pi\int_0^1 \rho\,\rho^4\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = (s=\rho^2)$$

$$-\frac38\pi\int_0^1 s^2\sqrt{1-s}\,ds = \left(t=\sqrt{1-s}\quad t^2=1-s\quad s=1-t^2\quad ds=-2t\,dt\right) =$$

$$-\frac34\pi\int_1^0 (1-t^2)^2\, t(-t)\,dt = -\frac34\pi\int_0^1(1-t^2)^2t^2\,dt = -\frac34\pi\int(t^2-2t^4+t^6)\,dt =$$

$$-\frac34\pi\left[\frac{t^3}{3}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}\right]_0^1 = -\pi\frac34\left(\frac13-\frac25+\frac17\right) = -\pi\frac{\cancel{3}}{4}\,\frac{35-42+15}{\cancel{3}\cdot5\cdot7} = -\frac{\pi}{4}\,\frac{8}{35} = -\frac{2\pi}{35}$$

IN COORD. SFERICHE (I)

$$-3\iiint_D y^2z^2\,dx\,dy\,dz = -3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^1 \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\,\rho^2\cos^2\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho =$$

$$-3\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta}_{=\frac{\pi}{2}}\ \underbrace{\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi}_{t=\cos\varphi}\ \underbrace{\int_0^1\rho^6\,d\rho}_{=\frac17} = -\frac32\pi\int_1^{-1}(1-t^2)t^2(-dt)\cdot\frac17 =$$

$$-\frac{3\pi}{28}\int_{-1}^1(t^2-t^4)\,dt = -\frac{3\pi}{28}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^1 = -\frac{3\pi}{14}\left(\frac13-\frac15\right) = -\frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{14}_{\,7}}\,\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{15}_{\,5}} = -\frac{2\pi}{35}$$

IN COORD. SFERICHE (II) $\quad y=\rho\cos\theta\sin\varphi\quad z=\rho\sin\theta\sin\varphi\quad x=\rho\cos\varphi$

$$-3\iiint_D y^2z^2\,dx\,dy\,dz = -3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^1\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\,\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho =$$

$$-3\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cos^2\varphi\,d\varphi}_{\frac{\pi}{4}}\ \underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^5\varphi\,d\varphi}_{t=\cos\varphi}\ \underbrace{\int_0^1\rho^6\,d\rho}_{\frac17} = -\frac{3}{28}\pi\int_0^1(1-t^2)^2\,dt =$$

$$-\frac{3}{28}\pi\int_0^1(1-2t^2+t^4)\,dt = -\frac{3}{28}\pi\left(1-\frac23+\frac15\right) = -\frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{28}_{\,7}}\,\frac{\overbrace{15-10+3}^{\cancel{8}\,2}}{\cancel{3}\cdot5} = -\frac{2\pi}{35}$$

3. Si Consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = & -3x + y & \quad x(0) = 0 \\ y' = & -x - y & \quad y(0) = -1 \\ z' = & -x + y - 2z & \quad z(0) = 0 \end{cases}$$

Indichiamo con A la matrice associata al sistema e con λ_i gli autovalori di A di molteplicità algebrica $m_A(\lambda_i)$; indichiamo anche con J ed M due matrici tali che $A = MJM^{-1}$ con J nella forma di Jordan. Si trovino allora (4p.) :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \boxed{-2}, \; m_A(\lambda_1) = \boxed{3}, \quad m_G(\lambda_1) = \boxed{2}$$

$$\lambda_2 = \boxed{}, \; m_A(\lambda_2) = \boxed{}, \quad m_G(\lambda_2) = \boxed{}$$

$$\lambda_3 = \boxed{}, \; m_A(\lambda_3) = \boxed{}, \quad m_G(\lambda_3) = \boxed{}$$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{pmatrix}$$

e si trovi infine (4p.) la soluzione del sistema:

$$x(t) = \boxed{-t\, e^{-2t}}$$

$$y(t) = \boxed{-(1+t)\, e^{-2t}}$$

$$z(t) = \boxed{-t\, e^{-2t}}$$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = (-2-\lambda) \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$$= -(\lambda+2)^3$$

Dunque ho un unico autovalore $\boxed{\lambda = -2}$ con $\boxed{m_A = 3}$

$$B := A + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ho tre righe eguali $\Rightarrow$ rango $= 1$ e $\dim(\text{Ker}) = 2 \leftarrow \boxed{m_G = 2}$

Cerco e_3 tale che $Be_3 \neq 0$. Posso prendere $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oppure $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

nel primo caso $Be_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nel secondo $Be_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pongo in ogni caso $e_2 = Be_3$.

Devo trovare infine e_1 con $Be_1 = 0$ e_1 ed e_2 lin. indip.

Per esempio $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Con queste scelte ho che $A = M J M^{-1}$ dove $J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e M

è uno dei: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(uno qualunque va bene e porta allo stesso risultato). Pongo $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se scelgo $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3)$ noto che $Y_0 = -e_3 \Rightarrow$

$M^{-1} Y_0 = -\hat{e}_3$ (perché $M\hat{e}_3 = e_3$). Dunque la soluzione

$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ con condizione iniziale Y_0 è

$$Y(t) = M e^{tJ} M^{-1} Y_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$-e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-2t} \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t e^{-2t} \\ -(1+t) e^{-2t} \\ -t e^{-2t} \end{pmatrix}$$