COGNOME: | | | | | | | | | | | | |

NOME: | | | | | | | | | | | | |

MATR.: | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino C del 20 aprile 2018 - PARTE A[1]

1. Si dica qual è il raggio di convergenza $\bar{R}$ della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ (1p.) e si indichi inoltre l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ delle x su cui la serie converge (1p.):

   $\bar{R} = \boxed{1}$, $A = \boxed{[-1, 1[}$.

   Detta $f(x)$ la somma della serie scritta sopra si trovi (1p.):

   $$f'''(0) = \boxed{\frac{3}{2}} / \boxed{\text{non esiste}}.$$

2. Consideriamo la seguente serie trigonometrica in $\mathbb{C}$: $f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in}{1+n^4} e^{int}$. Allora (1p. a risposta):

   (a) $f(t)$ esiste per ogni t ed è continua. ~~SI~~ NO
   (b) $f(t)$ è reale per ogni t di $\mathbb{R}$. ~~SI~~ NO
   (c) f è pari / ~~dispari~~ / né pari né dispari.
   (d) f è di classe C^1 ~~SI~~ NO.

3. Siano $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Si dica quali delle seguenti implicazioni è vera (1p. ciascuna)

   (a) Se $0 \leq f_n \leq 1$ e $f_n \to f$ puntualmente su $[0,1]$ allora f è integrabile. ~~SI~~ NO
   (b) Se $f_n \to f$ uniformemente su $[0,1]$, allora f è derivabile. SI ~~NO~~
   (c) Se per ogni $\alpha < 1$ si ha $f_n \to f$ uniformemente su $[0,\alpha]$, allora f è continua su $[0,1[$. ~~SI~~ NO
   (d) Se le f'_n convergono uniformemente, allora le f_n convergono puntualmente. SI ~~NO~~

4. Siano $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si enunci un teorema (3p.) che (mettendo opportune ipotesi) permetta di scrivere

   $$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

   Enunciato:

   Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono di classe $C^1([a,b])$; se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono tali che
   (a) $f_n \to f$ puntualmente su $[a,b]$
   (b) $f'_n \to g$ uniformemente su $[a,b]$

   Allora f è di classe C^1 e $f' = g$.

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A≥ 4; Voto A+Voto B≥ 10 Tempo: mezzora per la parte A, un ora e mezza per la parte B

Ingegneria Aerospaziale, Compitino C del 20 aprile 2018 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) := \sin(t)$ se $0 \le t \le \pi$ e estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da risultare π-periodica. Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier di f (5p.):

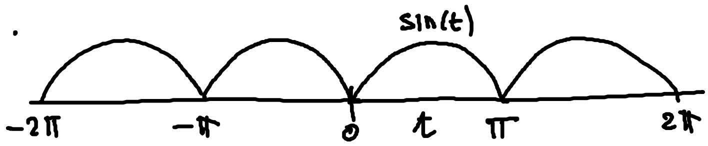
$\omega = \boxed{2}$, $a_0 = \boxed{\frac{2}{\pi}}$, $a_n = \boxed{\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}}$, $b_n = \boxed{0}$.

Si dica se la serie trovata converge uniformemente a f (1p.) ~~SI~~ NO.

Si usi quanto trovato per calcolare (2p.) la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \boxed{}$.

Svolgimento

- Dato che $T = \pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.



- Dato che $f(t)$ è PARI
  $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n$
- $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$
- Se $n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\cos(2nt)\,dt =$ (per parti - integro $\sin(t)$)

$$\frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\cos(2nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-\cos(t))(-2n\sin(2nt))\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(1-(-1)\right) - \frac{4n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t)\sin(2nt)\,dt = \frac{4}{\pi} - \frac{4n}{\pi}\underbrace{\left[\sin(t)\sin(2nt)\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$+ \frac{4n}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(2nt)\cdot 2n\,dt = \frac{4}{\pi} + \frac{8n^2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(2nt)\,dt$$

$$= \frac{4}{\pi} + 4n^2 a_n \Rightarrow (1-4n^2)a_n = \frac{4}{\pi} \Leftrightarrow a_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}$$

- Dato che $|a_n| \simeq \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}$ che è sommabile si ottiene la convergenza uniforme
- Se calcolo $f(\pi/2)$ trovo $1 \Rightarrow$

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi/2)}{1-4n^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi}-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$x^2y'' + (3x-2)y' - 35y = 6x^2$$

Si cerchino le soluzioni tra le serie di potenze centrate in zero, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per gli a_n (3p.):

$$(R) \qquad a_{n+1} = \frac{(n+7)(n-5)}{2(n+1)} a_n + \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ -1 & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

(b) Si mostri che le soluzioni sono tutte dei polinomi di grado m dove $m = \boxed{5}$ (1p.).

(c) Si trovi (2p.), se esiste, una soluzione con $y(0) = 0$:

$y(x) = \boxed{-x^3 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{11}{4}x^5}$ / non esiste

(d) Si trovi (2p.), se esiste, una soluzione con $y'(0) = \frac{1}{36}$:

$y(x) = \boxed{-\frac{1}{630} + \frac{x}{36} - \frac{2x^2}{9}}$ / non esiste

Svolgimento

(a) Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$

e $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$. Ne segue

$x^2y'' + 3xy' - 2y' - 35y =$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + 3a_n n x^n - 2a_{n+1}(n+1)x^n - 35a_n x^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n\left[n^2 - n + 3n - 35\right] - 2a_{n+1}(n+1)\right) x^n =$

$n^2+2n-35$ ha radici $-1 \pm \sqrt{1+35} = -1 \pm 6 = \begin{cases} 5 \\ -7 \end{cases}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+7)(n-5)a_n - 2(n+1)a_{n+1}\right] x^n$. IMPONGO L'EQUAZIONE:

$$(n+7)(n-5)a_n - 2(n+1)a_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ 6 & \text{se } n = 2 \end{cases} \iff$$

(posso dividere per $2(n+1) \neq 0 \ \forall n$)

$$a_{n+1} = \frac{(n+7)(n-5)}{2(n+1)}\, a_n + \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 2 \\ \dfrac{-6}{2(n+1)} = -1 & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

(b) se $n = 5$ trovo $a_6 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 6$

(c) se prendo $y(0) = 0$ allora $a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ $(n=0)$ $\Rightarrow$

$a_2 = 0$ $(n=1)$ $\Rightarrow$ $a_3 = 0 - 1 = -1$ $(n=2)$

$$a_4 = \frac{(3+7)(3-5)}{2\cdot 4}\, a_3 = \frac{10(-2)}{2\cdot 4}(-1) = \frac{5}{2} \qquad (n=3)$$

$$a_5 = \frac{(4+7)(4-7)}{2\cdot 5}\, a_4 = \frac{11(-1)}{2\cdot 5}\,\frac{5}{2} = -\frac{11}{4} \qquad (n=4)$$

$$y(x) = -x^3 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{11}{4}x^5$$

(d) Se $y'(0) = \frac{1}{36} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{36}$. Da (R):

$(n=0)$ $\quad \frac{1}{36} = \frac{7(-5)}{2\cdot 1}\, a_0 \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{35\cdot 18} = -\frac{1}{630}$

$(n=1)$ $\quad a_2 = \frac{8\cdot(-4)}{2\cdot 2}\,\frac{1}{36} = -\frac{2}{9}$

$(n=2)$ $\quad a_3 = \frac{9(-3)}{2\cdot 3}\left(-\frac{2}{9}\right) - 1 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \geq 3$

$$\Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{630} + \frac{x}{36} - \frac{2x^2}{9}$$

3. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) := \dfrac{x^2}{3n^2 + x^4}$. Si dica (giustificando) se:

(a) $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$ (1p) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(b) $f_n \to 0$ in energia su $\mathbb{R}$ (2p) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(c) la serie $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge per ogni x in $\mathbb{R}$ (1p) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

(d) la funzione f sopra introdotta è continua nei punti in cui è definita (3p.) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$;

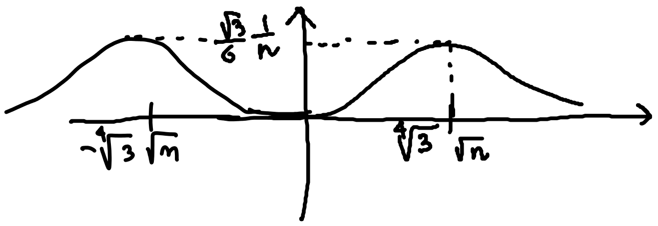
(e) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $\mathbb{R}$ (2p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$.

Svolgimento

Conviene fare il grafico di $f_n(x)$: $f(0) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (f_n è dispari)

$$f_n'(x) = \frac{2x(3n^2+x^4) - x^2(4x^3)}{(3n^2+x^4)^2} = \frac{2x}{(3n^2+x^4)^2}\left(3n^2+x^4-2x^4\right) = \frac{2x(3n^2-x^4)}{(3n^2+x^4)^2}$$

$f_n'(x) = 0 \iff x = 0,\ x = \pm\sqrt[4]{3}\sqrt{n}$ $\qquad f_n(0) = 0 \quad f_n(\sqrt[4]{3}\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{3}\,n}{3n^2+3n^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{1}{n}$



(a) dato che $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{1}{n} \to 0$ la successione tende a zero UNIF.

(b) Per la convergenza in energia serve $\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n^2(x)\,dx =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{(3n^2+x^4)^2}\,dx = \left(x^4 = n^2y^4 \iff x = \sqrt{n}\,y,\ dx = \sqrt{n}\,dy\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2y^4}{(3n^2+n^2y^4)^2}\sqrt{n}\,dy = \frac{n^2\sqrt{n}}{n^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^4}{(3+y^4)^2}\,dy = \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^4}{(3+y^4)^2}\,dy$$

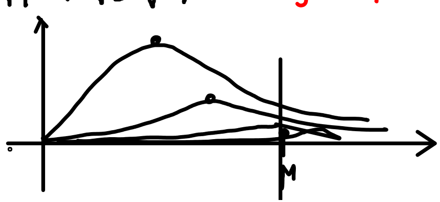
$\to 0$ se $n \to \infty$, dunque $f_n \to 0$ in energia.

(c) Dato che $|f_n(x)| \simeq \dfrac{x^2}{3}\dfrac{1}{n^2}$ che è sommabile, la serie $\sum_1^\infty f_n$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ $\iff$ $f(x)$ $\exists$ f.to $\forall x \in \mathbb{R}$

(d) Dai conti del punto (a) si vede che la serie NON CONV. TOTALM. su $\mathbb{R}$ (perché $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{1}{n}$ non è sommabile.). Fisso $M > 0$ e considero

$$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} = \max_{-M\le x\le M} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{1}{n} & \text{se } \sqrt[4]{3}\sqrt{n} \le M \quad \text{n piccolo (solo pochi n)} \\[2ex] \dfrac{M^2}{3n^2+M^4} & \text{se } M < \sqrt[4]{3}\sqrt{n} \quad \text{n grande} \end{cases}$$

DUNQUE $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[-M,M]} = \sum_{n\le M^2} \dfrac{\sqrt{3}}{6}\dfrac{1}{n} + \sum_{n>M^2} \dfrac{M^2}{3n^2+M^4}$



La prima sommatoria ha un numero finito di termini, la seconda è convergente perché $\frac{M^2}{3n^2+M^4} \simeq \frac{M^2}{3}\frac{1}{n^2}$ sommabili. $\Rightarrow$

La serie converge unif. su $[-M,M]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ è continua su $[-M,M]$

Per l'arbitrarietà di M $\Rightarrow$ f è continua su tutto $\mathbb{R}$.

(d) Se convergesse unif. su $\mathbb{R}$ avrei $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$

Ma se $x = \sqrt{m}$ con $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$f(\sqrt{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{3n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{3n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{3m^2+m^2} = \frac{1}{4m}\underbrace{\sum_{n=1}^{m} 1}_{=m}$$

$= \frac{1}{4} > 0$. DUNQUE NON PUÒ CONVERGERE UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$

$x = m^{\alpha}$ $\quad \alpha > 0$ da trovare

$$f(m^{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{2\alpha}}{3n^2 + m^{4\alpha}}$$ ← conviene che $4\alpha = 2 \iff \alpha = 1/2$

$x = \sqrt{m}$

$$f(\sqrt{m}) = \frac{m}{3+m^2} + \frac{m}{12+m^2} + \frac{m}{27+m^2} + \frac{m}{48+m^2} + \dots$$

$\frac{x^2}{3n^2+x^4}$ $\quad m \geq 1$

$$\geq \frac{m}{3+m^2} + \frac{m}{12+m^2} + \dots + \frac{m}{3m^2+m^2} \geq$$

$$\geq \frac{m}{3m^2+m^2} + \dots + \frac{m}{3m^2+m^2} =$$

$$m \cdot \frac{m}{3m^2+m^2} = \frac{m^2}{4m^2} = \frac{1}{4}$$

$f(\sqrt{m}) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow$ NON PUÒ essere $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$