COGNOME: | | | | | | | | | | | |

NOME: | | | | | | | | | | | |

MATR.: | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. ESEMPIO compitino marzo 2018 - PARTE A[1]

1. Sia $M := \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Allora la frontiera ∂M è descritta da una curva chiusa regolare. (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$. NE SERVONO DUE   0

2. Sia : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e sia Q il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$. Allora il massimo di f su Q è assunto in un punto (x_0, y_0) appartenente a ∂Q. (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$. (NON NECESSARIAMENTE SU ∂Q)

3. Si calcoli (1p.) $\max\limits_{x^2+y^2=1} (x + y) = \boxed{\sqrt{2}}$. $\begin{cases} 1 = \lambda 2x \\ 1 = \lambda 2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$ $x = y \Rightarrow 2x^2 = 1$ PTI CRITICI VINCOLATI $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. La funzione $f(x, y) := (x^2 + y^2)^{-1/2}$, posta 0 in $(0, 0)$, è integrabile sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ (1p.) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$. Se integro sulla palla $B(0,\sqrt{2})$ di raggio $\sqrt{2}$ (che contiene Q) trovo (*) $\Rightarrow 0 \le \iint_Q f \le \iint_B f < +\infty$

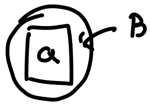
5. Se una funzione $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ è integrabile (secondo Lebesgue) su $\mathbb{R}^N$, allora $|f|$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$ (1p.) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$. (dalla def. di integrabilità)

6. Si enunci il teorema delle funzioni implicite nel caso scalare (riguardante $M := \{\mathbf{x} \in \Omega : f((\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$) (4p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

Svolgimento

GUARDARE LE NOTE ...

(*) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho} \rho \, d\rho = 2\pi\sqrt{2} < +\infty$



[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A$\geq$ 4; Voto A+Voto B$\geq$ 10 Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := xy^3$ e l'insieme $M := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Si risponda (giustificando) alle seguenti domande.

   (a) f ha massimo e minimo su M (1p.) ☒ SI ☐ NO.

   (b) si ha (7p.):

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y) = \boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{16}}, \quad \max_{(x,y)\in M} f(x,y) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{16}},$$

Svolgimento

(a) f è continua, M è chiuso e limitato.

(b) $\nabla f = \begin{pmatrix} y^3 \\ 3xy^2 \end{pmatrix}$. I pti critici liberi sono $\boxed{y=0 \quad x \text{ qualunque}}$

Su tali punti f vale zero. Cerco i pti critici vincolati (molt. di Lagrange)

$$\begin{cases} y^3 = \lambda 2x \\ 3xy^2 = \lambda 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

MOLTIPLICO per x la I^a riga e per y la II^a e poi sommo $\Rightarrow$
$xy^3 + 3xy^3 = 2\lambda(x^2+y^2) = 2\lambda \Rightarrow 2\lambda = 4xy^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^3 = 4x^2y^3 \\ 3xy^2 = 4xy^4 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

La prima riga equivale a $y^3=0$ oppure $1 = 4x^2$
se $y^3=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$ vale anche la II^a e dalla III^a
ricavo $x = \pm 1$
Se $y \neq 0$ ho $x^2 = \frac{1}{4}$ e dalla II^a ho $y^2 = \frac{3}{4}$
(e la III^a è vera) DUNQUE HO $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

IN TUTTO HO SEI PTI CRITICI VINCOLATI: $(0, \pm 1)$ (è già nei pti liberi)
e $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Su questi ultimi punti calcolando f trovo

$$\pm\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{4} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

2. Siano $M := \{(x, y, w, z) : 2xyw^2 + y^2z^2 + 1 = 0, xy^3 = w^3z\}$ e $P_0 := (1, -1, -1, 1)$.

   (a) Si mostri che esistono due funzioni $w(x, y)$ e $z(x, y)$ definite per (x, y) in un intorno U di $(1, -1)$, entrambe di classe $\mathcal{C}^1$, tali che $w(1, -1) = -1$, $z(1, -1) = 1$ e che vicino a P_0 i punti di M si descrivono univocamente come $(x, y, w(x, y), z(x, y))$ per $(x, y) \in U$ (4p.)

   (b) Si calcolino (4p.):

$$\frac{\partial w}{\partial x}(1, -1) = \boxed{0}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y}(1, -1) = \boxed{\frac{3}{5}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = \boxed{1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = \boxed{-\frac{6}{5}}.$$

Svolgimento

$$G(x,y,w,z) = \begin{pmatrix} 2xyw^2 + y^2z^2 + 1 \\ xy^3 - w^3z \end{pmatrix} \qquad (V = \{G = 0\},\ P_0 \in V)$$

$$J_G = \begin{bmatrix} 2yw^2, & 2xw^2 + 2yz^2, & 4xyw, & 2y^2z \\ y^3 & 3xy^2 & -3w^2z & -w^3 \end{bmatrix}$$

$$J_G(P_0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial (w z)}(P_0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{che ha det} = 10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ applicando il Dini trovo $F(x,y) = \begin{pmatrix} w(x,y) \\ z(x,y) \end{pmatrix}$ che descrive V come grafico di F, vicino a P_0. Inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial (x y)}(1,-1) = -\frac{\partial G}{\partial (w z)}(P_1)^{-1} \frac{\partial G}{\partial (x,y)}(P_1) = -\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2+2, & -6 \\ -6-4, & 12 \end{bmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

3. Se $D := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1\}$ si calcoli l'integrale (eventualmente infinito) (8p.):

$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2} = \boxed{2\pi^2}.$$

coordinate cilindriche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\rho^2+z^2}\rho\, d\rho = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[\frac{1}{2}\ln(\rho^2+z^2)\right]_0^1 =$$

$$\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln(1+z^2) - \ln z^2\right) dz = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) dz = \text{(per parti)}$$

$$\pi \left[z \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \pi \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{z^2}{1+z^2}\left(-\frac{2}{z^3}\right) dz =$$

$$2\pi \lim_{z\to\infty} z \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi^2 \quad \text{DATO CHE}$$

$$\lim_{z\to\infty} z\ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = \lim_{z\to\infty} z\left(\frac{1}{z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} = \left[\arctan z\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$